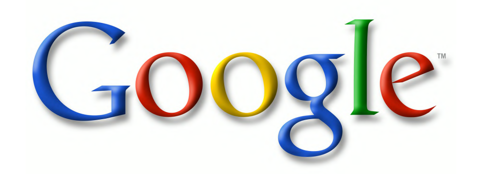
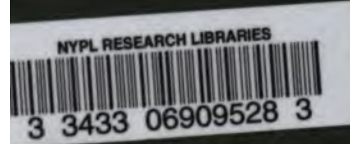



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909528 3





RARIES
9528 3











Sammlung

von

Beispielen, Formeln und Aufgaben

aus der

Buchstabenrechnung

und

Algebra,

von

Meier Hirsch.

Fünfte durchgesehene Ausgabe.

Berlin, 1838.

Verlag von Duncker und Humblot.



Vorrede des Verfassers.

Das Bedürfniß eines Buches, welches dem Anfänger Gelegenheit giebt, die aus den Lehrbüchern geschöpften Grundlehren der Rechnung anzuwenden, und sich darin die, zum weitern Fortschreiten durchaus unentbehrliche, Uebung zu verschaffen, war das, was mich schon vor geraumer Zeit zur Herausgabe dieses Werkchens bewog. Ob der innere Werth desselben, oder jenes Bedürfniß die Ursache der wiederholten Auflagen ist, bleibt dahin gestellt; ich glaube das Letztere.

Ich habe hin und wieder auch bei dieser, wie bei der vorigen Auflage, Veränderungen und Zusätze gemacht, wenn ich sie für nützlich hielt. Es wird mir stets angenehm seyn zu erfahren, wo dergleichen noch mehrere anzubringen seyn dürften. Zu der Höhe, Gleichungen des siebenten Grades eben so leicht, wie Gleichungen des zweiten Grades aufzulösen, habe ich, trotz aller Anstrengung, mich nicht aufzuschwingen vermocht. Sollte daher, in dieser Hinsicht, nicht alles nach dem Wunsche manches Lesers seyn, so bitte ich um Entschuldigung.

Berlin, im September 1815.

Meier Hirsch.

Zur fünften Ausgabe.

Die fortdauernde Krankheit des Verfassers hat demselben eben so wenig als bei der letzten eine Durchsicht dieser neuen Ausgabe verstattet. Sachkundige Männer, welchen die Verlagshandlung dieses Geschäft übertragen, haben sich demselben mit Fleiß und Ausdauer unterzogen, die Sammlung aber durch neue Aufgaben und Beispiele zu vermehren bei der bereits vorhandenen und allseitig anerkannten geschickten und reichen Auswahl um so bedenklicher und überflüssiger gehalten, je bekannter und brauchbarer dieses Buch in seiner gewohnten Gestalt dem Publikum geworden ist.

Auf die Vermeidung aller typographischen Irrthümer wie auf die äußere Ausstattung ist die möglichste Sorgfalt verwendet worden.

Die Verlagshandlung.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Vorrede des Verfassers.

Das Bedürfniß eines Buches, welches dem Anfänger Gelegenheit giebt, die aus den Lehrbüchern geschöpften Grundlehren der Rechnung anzuwenden, und sich darin die, zum weitern Fortschreiten durchaus unentbehrliche, Uebung zu verschaffen, war das, was mich schon vor geraumer Zeit zur Herausgabe dieses Werkchens bewog. Ob der innere Werth desselben, oder jenes Bedürfniß die Ursache der wiederholten Auflagen ist, bleibt dahin gestellt; ich glaube das Letztere.

Ich habe hin und wieder auch bei dieser, wie bei der vorigen Auflage, Veränderungen und Zusätze gemacht, wenn ich sie für nützlich hielt. Es wird mir stets angenehm seyn zu erfahren, wo dergleichen noch mehrere anzubringen seyn dürften. Zu der Höhe, Gleichungen des siebenten Grades eben so leicht, wie Gleichungen des zweiten Grades aufzulösen, habe ich, trotz aller Anstrengung, mich nicht aufzuschwingen vermocht. Sollte daher, in dieser Hinsicht, nicht alles nach dem Wunsche manches Lesers seyn, so bitte ich um Entschuldigung.

Berlin, im September 1815.

Meier Hirsch.

Zur fünften Ausgabe.

Die fortdauernde Krankheit des Verfassers hat demselben eben so wenig als bei der letzten eine Durchsicht dieser neuen Ausgabe verstattet. Sachkundige Männer, welchen die Verlagshandlung dieses Geschäft übertragen, haben sich demselben mit Fleiß und Ausdauer unterzogen, die Sammlung aber durch neue Aufgaben und Beispiele zu vermehren bei der bereits vorhandenen und allseitig anerkannten geschickten und reichen Auswahl um so bedenklicher und überflüssiger gehalten, je bekannter und brauchbarer dieses Buch in seiner gewohnten Gestalt dem Publikum geworden ist.

Auf die Vermeidung aller typographischen Irrthümer wie auf die äußere Ausstattung ist die möglichste Sorgfalt verwendet worden.

Die Verlagshandlung.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Zweite Abtheilung.

Dritte Abtheilung.

3.

VIII. Logarithm..

1. Hauptformeln . .
2. Anwendung der Produkten,

Erste Abtheilung,

enthaltend

Beispiele für die verschiedenen Verfahrungsarten der Rechnung.

I. Decimalbrüche.

Was heißt ein Decimalbruch? Welche Veränderung gehet mit demselben vor, wenn der Decimalstrich um einige Stellen vor= oder rückwärts gerückt wird? — Wie wird ein gewöhnlicher Bruch in einen Decimalbruch verwandelt? Wie werden Decimalbrüche addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt? — Was heißt bei Decimalbrüchen eine Periode? Wenn ein gewöhnlicher Bruch in einen Decimalbruch verwandelt wird: wie viele Ziffern kann eine solche Periode alsdann höchstens enthalten? — Wenn es erlaubt ist, in den Produkten und Quotienten die letzten Decimalziffern als unbedeutend zu vernachlässigen, wird die verkürzte Multiplikation und Division angewandt. — Worin bestehen ihre Vortheile? Und durch welche Mittel erlangt sie dieselben?

1) Addition.

1)
```
  0,857
  0,678
  -----
  1,535
```

2)
```
  1,007
  2,346
  -----
  3,353
```

3)
```
   0,00076
  13,795
  --------
  13,79576
```

4)
```
   12,0134
  196,785
    7,00006
  ---------
  215,79846
```

5)
```
   0,90058
   7,634
   3,007956
  ---------
  11,542536
```

6)
```
    7,345
    8,26
   37,534
   19,0005
   10,94
  103,729
  --------
  186,8085
```

7)
```
     7,6
   138,05934
    15,4
    10,76
     0,3592176
  1365,7
    37,6483
     0,005
  ------------
  1575,5318576
```

8)
```
    19,3576
    17,2340
  7652,007
     0,5
    39,069534
     7,83
     5,69784
     2,350006
  ----------
  7744,04598
```

9)
```
  113,67849
   76,859
    9,7
    5
  152,6043
    7,85976
    9,437
    8,65
    7,94
  ---------
  391,72855
```

2) Subtraktion.

1)
```
  0,947
  0,195
  -----
  0,752
```

2)
```
  9,567
  3,078
  -----
  6,489
```

3)
```
  213,5734
   87,6572
  --------
  125,9162
```

4) 54,763 / 0,921 / 53,842

5) 73,5673 / 12,889 / 60,6783

6) 385,76943 / 72,57 / 313,19943

7) 27,003 / 7,6854 / 19,3176

8) 129,57 / 6,894356 / 122,675644

9) 0,975 / 0,483764 / 0,491236

10) 23,005 / 4,76943 / 18,23557

11) 96,5 / 0,000783 / 96,499217

12) 0,5 / 0,0003 / 0,4997

---

3) Multiplikation.

1) 3,57 × 6 = 21,42
2) 5,798 × 18 = 104,364
3) 0,5 × 36000 = 18000
4) 0,00563 × 17 = 0,09571
5) 0,0000054 × 3785 = 0,020439
6) 3,7 × 2,6 = 9,62
7) 5,78 × 3,4 = 19,652
8) 3,9765 × 4,378 = 17,409117
9) 32,76859 × 13,0076 = 426,240711284
10) 138,5 × 7,695708 = 1065,855558
11) 0,43 × 0,65 = 0,2795
12) 0,576 × 0,3854 = 0,2219904
13) 0,005 × 0,017 = 0,000085
14) 0,007853 × 0,00476 = 0,00003738028
15) 113,5 × 0,072 = 8,172
16) 0,372106 × 0,0054 = 0,0020093724

17) $0{,}137 \times 0{,}00056 = 0{,}00007672$

18) $0{,}376 \times 0{,}0076894 = 0{,}0028912144$

Verkürzte Multiplikation.

1)

```
      7,65340958
×     2,56307
  1530681916
   382670479
    45920457
     2296022
       53573
  19,61622447
```

2)

```
    0,7653478
×   0,3576
  22960434
   3826739
    535742
     45920
  0,27368835
```

3)

```
     8,56794323
×    0,5284765
  4283971615
   171358864
    68543545
     3427177
      599755
       51407
        4283
  4,527956646
```

4)

```
    37,346859416
×    0,007003458
  261428015912
     112040578
      14938743
       1867342
        298774
  0,261557161349
```

5)

```
      0,076934210834
×     0,000003057026
      230802632502
        3846710541
         538539475
           1538684
            461605
0,000000235189882807
```

6)

```
    15,7356783
×    2,564725
    314713566
     78678391
      9441406
       629426
       141620
         3147
          786
    40,3608342
```

4) Division.

1) 5,64 : 2 = 2,82
2) 7,5832 : 8 = 0,9479
3) 0,357642 : 6 = 0,059607
4) 0,32769414 : 18 = 0,01820523
5) 0,01765125 : 375 = 0,00004707
6) 75 : 16 = 4,6875
7) 731 : 8 = 91,375
8) 3,54 : 7 = 0,50571428.... (Periode 571428)
9) 8,2356:17=0,484447....(Per.4705882352941176)
10) 273,694 : 543 = 0,50404051...
11) 6938,57 : 276 = 25,13974637....
12) 0,000215 : 316 = 0,0000006803797...
13) 400 : 0,25 = 1600
14) 378 : 0,01 = 37800
15) 5640 : 0,0015 = 3760000
16) 183260 : 0,476 = 385000
17) 1 : 0,24 = 4,16666...
18) 2,53944 : 7,2 = 0,3527
19) 0,02382245 : 0,37 = 0,064385
20) 1114,869145005 : 0,385 = 2895,764013
21) 56,4 : 0,00015 = 376000
22) 10287,36 : 0,0036 = 2857600
23) 0,0001 : 0,02 = 0, 005
24) 145,817 : 0,0563 = 2590
25) 374 : 2,4 = 155,833333...
26) 15,713 : 18,18 = 0,86668505...
27) 137,51634 : 27,65 = 4,97346618...
28) 0,5 : 76,91342 = 0,00650081...
29) 0,046 : 0,00762089 = 6,0360404...
30) 1 : 3,2561047 = 0,30711543...
31) 38076 : 137 = 277,92700729...

Zweite Abtheilung.

Dritte Abtheilung.

II. Buchstabenrechnung im Allgemeinen.

Die bedeutende Erweiterung der Größenlehre in den letzten Jahrhunderten, die daraus erwachsene Vervielfältigung und Verwickelung ihrer Lehren und Sätze einerseits, und die Beschränktheit unserer Geisteskräfte andererseits, machte es bald zum Bedürfniß, schickliche Zeichen für unsere Vorstellungen einzuführen, eine Zeichensprache, kürzer, ausdrucksvoller und bestimmter als Worte. — Wie erreicht die Buchstabenrechnung diesen Zweck? Welche Zeichen braucht sie für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division? — Was heißt ein Aggregat von Größen? Was bedeuten die Klammern und Haken? Wo bedient man sich ihrer? Würde es wohl ein Mißverständniß erzeugen, wenn man sie wegließe? — Was sind Coefficienten?

Was nennt man entgegengesetzte Größen? Wo finden sich Beispiele davon? — Was heißt positiv und negativ, oder bejahet und verneint? — Das, was die Größen zu entgegengesetzten macht, ist nur eine Eigenschaft, eine Beziehung der einen auf die andere. — Wie heißt die Größe ohne diese Beziehung gedacht? — Vereinigung entgegengesetzter Größen ist eine Subtraktion absoluter Größen: weshalb?

---

1) Addition.

a) Addition einfacher Größen.

1)	2)	3)	4)
a	$7a$	$8f$	a
a	$5a$	f	b
$2a$	$12a$	$9f$	$a+b$

5) $\begin{array}{r} 7a \\ 10x \\ \hline 7a+10x \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} a \\ -a \\ \hline 0 \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 17a \\ -6a \\ \hline 11a \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 5a \\ -9a \\ \hline -4a \end{array}$

9) $\begin{array}{r} -6a \\ 10a \\ \hline 4a \end{array}$ 10) $\begin{array}{r} -3a \\ 2a \\ \hline -a \end{array}$ 11) $\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline a-b \end{array}$ 12) $\begin{array}{r} 8a \\ -5b \\ \hline 8a-5b \end{array}$

13) $\begin{array}{r} -7a \\ b \\ \hline -7a+b \end{array}$ oder $b-7a$ 14) $\begin{array}{r} -a \\ -a \\ \hline -2a \end{array}$ 15) $\begin{array}{r} -3a \\ -8a \\ \hline -11a \end{array}$ 16) $\begin{array}{r} -8a \\ -3b \\ \hline -8a-3b \end{array}$ oder $-(8a+3b)$

17) $\begin{array}{r} 3a \\ -5a \\ 8a \\ \hline 6a \end{array}$ 18) $\begin{array}{r} -12b \\ -4b \\ 13b \\ \hline -3b \end{array}$ 19) $\begin{array}{r} -6f \\ 9f \\ 13f \\ -8f \\ \hline 8f \end{array}$ 20) $\begin{array}{r} -7c \\ -5c \\ -3c \\ \hline -15c \end{array}$

21) $\begin{array}{r} 5d \\ 7d \\ d \\ -8d \\ \hline 5d \end{array}$ 22) $\begin{array}{r} 8e \\ -4e \\ 7e \\ -11e \\ \hline 0 \end{array}$ 23) $\begin{array}{r} 3g \\ 2h \\ -5g \\ 7h \\ -10g \\ \hline -12g+9h \end{array}$ oder $9h-12g$ 24) $\begin{array}{r} 3a \\ -5a \\ 7a \\ 2b \\ -c \\ 4b \\ \hline 5a+6b-c \end{array}$

b) Addition zusammengesetzter Größen.

1) $\begin{array}{r} 7a-5c+3b \\ 2a-3c-7b \\ \hline 9a-8c-4b \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 5a+4b-3c-7d+8 \\ 3a-12b+7c-10d-4 \\ \hline 8a-8b+4c-17d+4 \end{array}$

3) $\begin{array}{r} 12h-3c-7f+3g \\ -3h+8c-2f-9g+5x \\ \hline 9h+5c-9f-6g+5x \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 16a-5b+10c-9d \\ 3a+18b-5c-7d+3e \\ -7a-2b\quad-3d+5e-9h \\ 11a-3b+2c+8d\quad+7h \\ \hline 23a+8b+7c-11d+8e-2h \end{array}$

5) $$\begin{array}{rrrrr} 7x-6y&+5z&+3&-&g\\ -x-3y&&-8&-&g\\ -x+y&-3z&-1&+&7g\\ -2x+3y&+3z&-1&-&g\\ x+8y&-5z&+9&+&g\\ \hline 4x+3y&&+2&+&5g \end{array}$$

6) $$\begin{array}{rrrr} 8a+b&&&\\ 2a-b&+c&&\\ -3a+5b&&+2d&\\ -6b&-3c&+3d&\\ -5a&+7c&-2d&\\ \hline 2a-b&+5c&+3d& \end{array}$$

7) $$\begin{array}{rrrrrrr} -a&+3b&-c&-115d&+6e&-5f&\\ 3a&-2b&-3c&-d&+27e&&\\ &5b&-8c&&+3e&-7f&\\ -7a&-6b&+17c&+9d&-5e&+11f&\\ -3a&&-5c&-2d&+6e&-9f&+g\\ \hline -8a&&&-109d&+37e&-10f&+g \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} -7f+3a\\ 4f-2a\\ 3f-3a\\ +2a\\ \hline 0 \end{array}$$

Der Lehrer wird wohl thun, für die Buchstaben bestimmte Zahlen anzunehmen, um seinem Schüler die Richtigkeit der Resultate anschaulich zu machen. Dies ist überhaupt im Anfange immer rathsam.

---

2) Subtraktion.

a) Subtraktion einfacher Größen.

1) $$\begin{array}{r} a\\ a\\ \hline 0 \end{array}$$ 2) $$\begin{array}{r} 7a\\ 3a\\ \hline 4a \end{array}$$ 3) $$\begin{array}{r} 10f\\ 10f\\ \hline 0 \end{array}$$ 4) $$\begin{array}{r} 5d\\ 11d\\ \hline -6d \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 7a\\ 5b\\ \hline 7a-5b \end{array}$$ 6) $$\begin{array}{r} a\\ -a\\ \hline 2a \end{array}$$ 7) $$\begin{array}{r} 8a\\ -a\\ \hline 9a \end{array}$$ 8) $$\begin{array}{r} 6a\\ -5a\\ \hline 11a \end{array}$$

9) $$\begin{array}{r} a\\ -4a\\ \hline 5a \end{array}$$ 10) $$\begin{array}{r} a\\ -b\\ \hline a+b \end{array}$$ 11) $$\begin{array}{r} 3a\\ -2b\\ \hline 3a+2b \end{array}$$ 12) $$\begin{array}{r} -9a\\ 3a\\ \hline -12a \end{array}$$

13) $$\begin{array}{r} -7a\\ -7a\\ \hline 0 \end{array}$$ 14) $$\begin{array}{r} -19a\\ -20a\\ \hline a \end{array}$$ 15) $$\begin{array}{r} -6a\\ -5a\\ \hline -a \end{array}$$ 16) $$\begin{array}{r} -3a\\ -5b\\ \hline -3a+5b \end{array}$$ oder $5b-3a$

17) $\begin{array}{r} -13 \\ 3 \\ \hline -16 \end{array}$ 18) $\begin{array}{r} -8 \\ -17 \\ \hline 9 \end{array}$ 19) $\begin{array}{r} 12 \\ -7 \\ \hline 19 \end{array}$ 20) $\begin{array}{r} -13 \\ -8 \\ \hline -5 \end{array}$

b) Subtraktion zusammengesetzter Größen.

1) $\begin{array}{r} 3a-2b+6 \\ 2a-7b-3 \\ \hline a+5b+9 \end{array}$

2) $\begin{array}{r} 13a-2b+9c-3d \\ 8a-6b+9c-10d+12 \\ \hline 5a+4b+7d-12 \end{array}$

3) $\begin{array}{r} -7f+3m-8x \\ -6f-5m-2x+3d+8 \\ \hline -f+8m-6x-3d-8 \end{array}$

4) $\begin{array}{r} 2a-e-h-l \\ 9a-3e+4h-l-c \\ \hline -7a+2e-5h+c \end{array}$

5) $\begin{array}{r} -a-5b+7c-d \\ 4b-3c+2d+3k \\ \hline -a-9b+10c-3d-3k \end{array}$

6) $\begin{array}{r} 3h-2k \\ 9l-7-8k \\ \hline 3h-9l+6k+7 \end{array}$

7) $\begin{array}{r} -3a+b-8c+7e-5f+3h-7x-13y \\ k+2a-9c+8e+7f-7x-y-3l-k \\ \hline -5a+b+c-e-12f+3h-12y+3l \end{array}$

8) $\begin{array}{r} 5b-3a+203c+5 \\ -2b-8a+67c+7 \\ \hline 7b+5a+136c-2 \end{array}$

9) $\begin{array}{r} -14b+3c-27d+3-5g \\ 7a-5c-8d+3b-12+7g \\ \hline -7a-17b+8c-19d+15-12g \end{array}$

10) $\begin{array}{r} 6a+5-3b-5f-g-h \\ -2a-9b+8g-9h+7f-8 \\ \hline 8a+6b+13-12f-9g+8h \end{array}$

11) $\begin{array}{r} 3c-2l+5c \\ 8l+7c-4l \\ \hline c-6l \end{array}$

12) $\begin{array}{r} 3a-17b-10b+13a-2a \\ 6b-8a-b-2a+3d+9a-5h \\ \hline 15a-32b-3d+5h \end{array}$

13) $\begin{array}{r} 5c+3 \\ 2c-9-7c \\ \hline 10c+12 \end{array}$

14) $\begin{array}{r} 8a-5b-3c-7d+5e-8f+3g+17k \\ -2k+3c-5b+2d-4e-7f+9g-5k-l \\ \hline 8a-6c-9d+9e-f-6g+24k+l \end{array}$

15) $32a+3b-(5a+17b)=27a-14b$

16) $13a-(5c+3f-7a-5x+3a)=17a-5c-3f+5x$

17) $-8a+5b-3c-(7a-3b-2c)=-15a+8b-c$

18) $3a-5c+3d-(7a-5d+8c-2e)=8d+2e-4a-13c$

19) $37a-5f-(3a-2b-5c)-(6a-4b+3h)$
$=28a+6b-5f+5c-3h$

20) $a+b-(2a-3b)-(5a+7b)-(-13a+2b)=7a-5b$

21) $\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}x-(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}x)-(3b+\frac{11}{4}x-\frac{2}{3}a)$
$=\frac{5}{12}a-\frac{37}{12}x-3b=\frac{5a}{12}-\frac{37x}{12}-3b$

---

3) Multiplikation.

a) Multiplikation einfacher Größen.

1) $a\times b=b\times a=ab=ba=a\cdot b=b\cdot a$

2) $a\times b\times c=abc=acb=bac=bca=cab=cba$

3) $-a\times b=-ab$

4) $a\times -b=-ab$

5) $-a\times -b=ab$

6) $6a\times 7b=42ab$

7) $17a\times\frac{3}{4}b=\frac{51}{4}ab=\frac{51ab}{4}$

8) $\frac{3a}{2}\times\frac{5f}{4}=\frac{15af}{8}=\frac{15}{8}af$

9) $-3a\times 14c=-42ac$

10) $7a\times -10b=-70ab$

11) $\frac{3}{8}a\times -\frac{2}{3}b=-\frac{1}{4}ab=-\frac{ab}{4}$

12) $a\times -7b=-7ab$

13) $-6a\times -11x=66ax$

14) $-\frac{5a}{4}\times -\frac{3b}{7}=\frac{15ab}{28}$

15) $ab \times cde = abcde$
16) $-5abc \times -7ade = 35aabcde$
17) $-5bd \times 9bbdxy = -45bbbddxy$
18) $-\frac{1}{2}abd \times \frac{1}{4}cdef = -\frac{1}{8}abcddef$
19) $17ace \times 5 = 85ace$

20) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

21) $-\frac{3fh}{5cde} \times ag = -\frac{3afgh}{5cde}$

22) $\frac{1}{fgh} \times 4cd = \frac{4cd}{fgh}$

23) $\frac{5ac}{bde} \times -\frac{7bfg}{3ad} = -\frac{35cfg}{3dde}$

24) $-\frac{h}{2fg} \times -\frac{g}{3h} = \frac{1}{6f}$

25) $3ab \times 2cd \times dfg = 6abcddfg$

26) $-\frac{a}{b} \times b \times -5df = 5adf$

27) $-4ab \times -\frac{3cde}{2aab} \times -\frac{1}{5cf} = -\frac{6de}{5af}$

28) $-a \times -a \times -a \times -a = aaaa$

29) $\frac{2ac}{bg} \times -\frac{3bd}{4cfh} \times hf = -\frac{3ad}{2g}$

30) $\frac{1}{a} \times -\frac{3ac}{x} \times \frac{c}{x} = -\frac{3cc}{xx}$

31) $\frac{2fg}{bdh} \times \frac{3xy}{7fz} \times -\frac{bc}{5d} = -\frac{6cgxy}{35ddhz}$

b) Multiplikation zusammengesetzter Größen.

1) $(6a + 3b - 5f) \times 5g = 30ag + 15bg - 25fg$
2) $(-2b + 3c - g) \times -8h = 16bh - 24ch + 8gh$
3) $(7ad - 15bc - 16acf) \times 10ab = 70aabd - 150abbc$
$- 160aabcf$

4) $\left(\frac{5a}{b} - \frac{13c}{2d} - \frac{6h}{5bg} + 7d\right) \times \frac{3a}{5d} = \frac{3aa}{bd} - \frac{39ac}{10dd}$
$- \frac{18ah}{25bdg} + \frac{21a}{5}$

5) $(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$

6) $(a+b-c)(d-e) = ad+bd-cd-ae-be+ce$

7) $(2a-3b-8c-d+9e) \times (7f+2g-h) = 14af$
$-21bf-56cf-7df+63ef+4ag-6bg-16cg$
$-2dg+18eg-2ah+3bh+8ch+dh-9eh$

8) $(7l-2m-9) \times (3l-11m) = 21ll-83lm-27l$
$+22mm+99m$

9) $(2a+5b+3c-5e) \times (3a+10b+15f) = 6aa$
$+35ab+9ac-15ae+50bb+30bc-50be$
$+30af+75bf+45cf-75ef$

10) $(a+b) \times (a-b) = aa-bb$

11) $(a+b) \times (a+b) = aa+2ab+bb$

12) $(a-b) \times (a-b) = aa-2ab+bb$

13) $(3a+5b-\frac{7}{2}c) \times (a-2b+9c) = 3aa-ab+\frac{47}{2}ac$
$-10bb+52bc-\frac{63}{2}cc$

14) $(3c-5d+\frac{3}{4}g-\frac{5}{3}h) \times (\frac{2}{3}c-d+7g+\frac{1}{2}h) = 2cc$
$-\frac{19}{3}cd+\frac{43}{2}cg+\frac{7}{18}ch+5dd-\frac{143}{4}dg-\frac{5}{6}dh+\frac{21}{4}gg$
$-\frac{271}{24}gh-\frac{5}{6}hh$

15) $(5ab+3ac-4bc) \times (7ab-18ac+2bc+d)$
$=35aabb-69aabc-18abbc+5abd-54aacc$
$+78abcc+3acd-8bbcc-4bcd$

16) $(13bcd+20bce-10bde) \times (4bc+3bd-12e)$
$=52bbccd+80bbcce+20bbcde+39bbcdd$
$-30bbdde-156bcde-240bcee+120bdee$

17) $(5aa-3ab+7bb) \times (3a-b) = 15aaa-14aab$
$+24abb-7bbb$

18) $(a+b+c) \times (a+b-c) = aa+2ab+bb-cc$

[illegible] $— 13bbb) \times (3aa +$ [illegible]

[illegible] $+ 741bbbb$

[illegible] $\times (17a — 2b + 12c) =$ [illegible]

[illegible] $+ 2bb — 16bc$ [illegible]

[illegible] $= aa — bb$ [illegible]

[illegible] $= 6af —$ [illegible]

[illegible] $+ 3bcc — cccc$

[illegible] $= \frac{3}{2}mm —$ [illegible]

[illegible] $= 35f — \frac{49gg}{4h}$

[illegible] $\frac{bbbb}{yyyy}$ [illegible]

4) [illegible] Größen.

a) Division [illegible]

1) $a:b = \frac{a}{b}$

2) $—a:b = —\frac{a}{b}$

3) $a:—b = —\frac{a}{b}$

4) $—a:—b = \frac{a}{b}$

5) $3a:5b = \frac{3a}{5b}$

6) $—16a:8b = —\frac{2}{b}$ [illegible]

7) $12a:—15b = —\frac{4a}{5}$ [illegible]

8) $—14a:—4b = \frac{7}{2}$ [illegible]

9) $abc : a = bc$ 10) $abc : ad = \frac{bc}{d}$

11) $8fmn : -2fgm = -\frac{4n}{g}$

12) $-12abcde : -8acd = \frac{3be}{2}$

13) $6abde : -2bf = -\frac{3ade}{f}$

14) $27aaabbcfg : -18abcghk = -\frac{3aabf}{2hk}$

15) $35abfgm : 5aabffgmn = \frac{7}{afn}$

16) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

17) $\frac{3afx}{bc} : \frac{2fxx}{5cde} = \frac{15ade}{2bx}$

18) $3fm : -\frac{3am}{5bg} = -\frac{5bfg}{a}$

19) $\frac{2ay}{5bcx} : 3ac = \frac{2y}{15bccx}$

20) $\frac{1}{7fggl} : \frac{1}{4fln} = \frac{4n}{7gg}$

21) $\frac{3}{4}ac : \frac{5}{6}abd = \frac{9c}{10bd}$

b) Division zusammengesetzter Größen.

1) $\left(3ac - 2ade - f + \frac{c}{d}\right) : 2a = \frac{3c}{2} - de - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad}$

2) $(18acf - 6bdef - 2ad) : 3adf = \frac{6c}{d} - \frac{2be}{a} - \frac{2}{3f}$

3) $(8aa - 6ab + 4c + 1) : -2a = -4a + 3b - \frac{2c}{a} - \frac{1}{2a}$

4) $(12acfg - 4affg + 3fggh) : 4aabbfg = \frac{3c}{abb}$
$- \frac{f}{abb} + \frac{3gh}{4aabb}$

19) $(3aaa + 35aab - 17abb - 13bbb) \times (3aa + 26ab - 57bb) = 9aaaaa + 183aaaab + 688aaabb - 2476aabbb + 631abbbb + 741bbbbb$

20) $(3a - b + 2c - 3d + 5e) \times (17a - 2b + 12c) = 51aa - 23ab + 70ac - 51ad + 85ae + 2bb - 16bc + 6bd - 10be + 24cc - 36cd + 60ce$

21) $(a + b + c + d) \times (a - b - c - d) = aa - bb - 2bc - 2bd - cc - 2cd - dd$

22) $(-2a + 3b - cc) \times (-3f - 7a + cc) = 6af - 9bf + 3ccf + 14aa - 21ab + 5acc + 3bcc - cccc$

23) $(\frac{3}{2}m - 5n - \frac{1}{3}pp) \times (\frac{1}{4}m - 2n + 6pp) = \frac{3}{8}mm - \frac{17}{4}mn + \frac{107}{12}mpp + 10nn - \frac{88}{3}npp - 2pppp$

24) $\left(\frac{5ff}{g} - \frac{7fg}{4h} + 3f\right) \times \left(\frac{7g}{f} + \frac{2f}{g}\right) = 35f - \frac{49gg}{4h} + 21g + \frac{10fff}{gg} - \frac{7ff}{2h} + \frac{6ff}{g}$

25) $\left(\frac{aa}{xx} - \frac{ab}{2xy} + \frac{bb}{yy}\right) \times \left(\frac{3aa}{xx} - \frac{2ab}{5xy} + \frac{bb}{yy}\right) = \frac{3aaaa}{xxxx} - \frac{19aaab}{10xxxy} + \frac{21aabb}{5xxyy} - \frac{9abbb}{10xyyy} + \frac{bbbb}{yyyy}$

---

4) Division.

a) Division einfacher Größen.

1) $a : b = \frac{a}{b}$

2) $-a : b = -\frac{a}{b}$

3) $a : -b = -\frac{a}{b}$

4) $-a : -b = \frac{a}{b}$

5) $5a : 3b = \frac{5a}{3b}$

6) $-16a : 8b = -\frac{2a}{b}$

7) $12a : -4b = -\frac{3a}{b}$

8) $-14a : -4b = \frac{7a}{2b}$

9) $abc : a = bc$ 10) $abc : ad = \frac{bc}{d}$

11) $8fmn : -2fgm = -\frac{4n}{g}$

12) $-12abcde : -8acd = \frac{3be}{2}$

13) $6abde : -2bf = -\frac{3ade}{f}$

14) $27aaabbcfg : -18abcghk = -\frac{3aabf}{2hk}$

15) $35abfgm : 5aabffgmn = \frac{7}{afn}$

16) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

17) $\frac{3afx}{bc} : \frac{2fxx}{5cde} = \frac{15ade}{2bx}$

18) $3fm : -\frac{3am}{5bg} = -\frac{5bfg}{a}$

19) $\frac{2ay}{5bcx} : 3ac = \frac{2y}{15bccx}$

20) $\frac{1}{7fggl} : \frac{1}{4fln} = \frac{4n}{7gg}$

21) $\frac{3}{4}ac : \frac{5}{6}abd = \frac{9c}{10bd}$

b) Division zusammengesetzter Größen.

1) $\left(3ac-2ade-f+\frac{c}{d}\right) : 2a = \frac{3c}{2} - de - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad}$

2) $(18acf-6bdef-2ad) : 3adf = \frac{6c}{d} - \frac{2be}{a} - \frac{2}{3f}$

3) $(8aa-6ab+4c+1) : -2a = -4a+3b-\frac{2c}{a} - \frac{1}{2a}$

4) $(12acfg - 4affg + 3fggh) : 4aabbfg = \frac{3c}{abb}$
$- \frac{f}{abb} + \frac{3gh}{4aabb}$

17) $\begin{array}{r} -13 \\ 3 \\ \hline -16 \end{array}$ 18) $\begin{array}{r} -8 \\ -17 \\ \hline 9 \end{array}$ 19) $\begin{array}{r} 12 \\ -7 \\ \hline 19 \end{array}$ 20) $\begin{array}{r} -13 \\ -8 \\ \hline -5 \end{array}$

b) Subtraktion zusammengesetzter Größen.

1) $$\begin{array}{r} 3a-2b+6 \\ 2a-7b-3 \\ \hline a+5b+9 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 13a-2b+9c-3d \\ 8a-6b+9c-10d+12 \\ \hline 5a+4b+7d-12 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} -7f+3m-8x \\ -6f-5m-2x+3d+8 \\ \hline -f+8m-6x-3d-8 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 2a-e-h-l \\ 9a-3e+4h-l-c \\ \hline -7a+2e-5h+c \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} -a-5b+7c-d \\ 4b-3c+2d+3k \\ \hline -a-9b+10c-3d-3k \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 3h-2k \\ 9l-7-8k \\ \hline 3h-9l+6k+7 \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} -3a+b-8c+7e-5f+3h-7x-13y \\ k+2a-9c+8e+7f-7x-y-3l-k \\ \hline -5a+b+c-e-12f+3h-12y+3l \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} 5b-3a+203c+5 \\ -2b-8a+67c+7 \\ \hline 7b+5a+136c-2 \end{array}$$

9) $$\begin{array}{r} -14b+3c-27d+3-5g \\ 7a-5c-8d+3b-12+7g \\ \hline -7a-17b+8c-19d+15-12g \end{array}$$

10) $$\begin{array}{r} 6a+5-3b-5f-g-h \\ -2a-9b+8g-9h+7f-8 \\ \hline 8a+6b+13-12f-9g+8h \end{array}$$

11) $$\begin{array}{r} 3c-2l+5c \\ 8l+7c-4l \\ \hline c-6l \end{array}$$

12) $$\begin{array}{r} 3a-17b-10b+13a-2a \\ 6b-8a-b-2a+3d+9a-5h \\ \hline 15a-32b-3d+5h \end{array}$$

13) $$\begin{array}{r} 5c+3 \\ 2c-9-7c \\ \hline 10c+12 \end{array}$$

14) $$\begin{array}{r} 8a-5b-3c-7d+5e-8f+3g+17k \\ -2k+3c-5b+2d-4e-7f+9g-5k-l \\ \hline 8a-6c-9d+9e-f-6g+24k+l \end{array}$$

15) $32a+3b-(5a+17b)=27a-14b$

16) $13a-(5c+3f-7a-5x+3a)=17a-5c-3f+5x$

17) $-8a+5b-3c-(7a-3b-2c)=-15a+8b-c$

18) $3a-5c+3d-(7a-5d+8c-2e)=8d+2e-4a-13c$

19) $37a-5f-(3a-2b-5c)-(6a-4b+3h)$
$=28a+6b-5f+5c-3h$

20) $a+b-(2a-3b)-(5a+7b)-(-13a+2b)=7a-5b$

21) $\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}x-(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}x)-(3b+\frac{11}{4}x-\frac{2}{3}a)$
$=\frac{5}{12}a-\frac{37}{12}x-3b=\frac{5a}{12}-\frac{37x}{12}-3b$

---

3) Multiplikation.

a) Multiplikation einfacher Größen.

1) $a \times b = b \times a = ab = ba = a \cdot b = b \cdot a$

2) $a \times b \times c = abc = acb = bac = bca = cab = cba$

3) $-a \times b = -ab$

4) $a \times -b = -ab$

5) $-a \times -b = ab$

6) $6a \times 7b = 42ab$

7) $17a \times \frac{3}{4}b = \frac{51}{4}ab = \frac{51ab}{4}$

8) $\frac{3a}{2} \times \frac{5f}{4} = \frac{15af}{8} = \frac{15}{8}af$

9) $-3a \times 14c = -42ac$

10) $7a \times -10b = -70ab$

11) $\frac{3}{8}a \times -\frac{2}{3}b = -\frac{1}{4}ab = -\frac{ab}{4}$

12) $a \times -7b = -7ab$

13) $-6a \times -11x = 66ax$

14) $-\frac{5a}{4} \times -\frac{3b}{7} = \frac{15ab}{28}$

15) $ab \times cde = abcde$

16) $-5abc \times -7ade = 35aabcde$

17) $-5bd \times 9bbdxy = -45bbbddxy$

18) $-\frac{1}{2}abd \times \frac{1}{4}cdef = -\frac{1}{8}abcddef$

19) $17ace \times 5 = 85ace$

20) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

21) $-\frac{3fh}{5cde} \times ag = -\frac{3afgh}{5cde}$

22) $\frac{1}{fgh} \times 4cd = \frac{4cd}{fgh}$

23) $\frac{5ac}{bde} \times -\frac{7bfg}{3ad} = -\frac{35cfg}{3dde}$

24) $-\frac{h}{2fg} \times -\frac{g}{3h} = \frac{1}{6f}$

25) $3ab \times 2cd \times dfg = 6abcddfg$

26) $-\frac{a}{b} \times b \times -5df = 5adf$

27) $-4ab \times -\frac{3cde}{2aab} \times -\frac{1}{5cf} = -\frac{6de}{5af}$

28) $-a \times -a \times -a \times -a = aaaa$

29) $\frac{2ac}{bg} \times -\frac{3bd}{4cfh} \times hf = -\frac{3ad}{2g}$

30) $\frac{1}{a} \times -\frac{3ac}{x} \times \frac{c}{x} = -\frac{3cc}{xx}$

31) $\frac{2fg}{bdh} \times \frac{3xy}{7fz} \times -\frac{bc}{5d} = -\frac{6cgxy}{35ddhz}$

b) Multiplikation zusammengesetzter Größen.

1) $(6a + 3b - 5f) \times 5g = 30ag + 15bg - 25fg$

2) $(-2b + 3c - g) \times -8h = 16bh - 24ch + 8gh$

3) $(7ad - 15bc - 16acf) \times 10ab = 70aabd - 150qbbc$
$- 160aabcf$

4) $\left(\frac{5a}{b}-\frac{13c}{2d}-\frac{6h}{5bg}+7d\right)\times\frac{3a}{5d}=\frac{3aa}{bd}-\frac{39ac}{10dd}$
$-\frac{18ah}{25bdg}+\frac{21a}{5}$

5) $(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$

6) $(a+b-c)(d-e) = ad+bd-cd-ae-be+ce$

7) $(2a-3b-8c-d+9e)\times(7f+2g-h)=14af$
$-21bf-56cf-7df+63ef+4ag-6bg-16cg$
$-2dg+18eg-2ah+3bh+8ch+dh-9eh$

8) $(7l-2m-9)\times(3l-11m) = 21ll-83lm-27l$
$+22mm+99m$

9) $(2a+5b+3c-5e)\times(3a+10b+15f)=6aa$
$+35ab+9ac-15ae+50bb+30bc-50be$
$+30af+75bf+45cf-75ef$

10) $(a+b)\times(a-b)=aa-bb$

11) $(a+b)\times(a+b)=aa+2ab+bb$

12) $(a-b)\times(a-b)=aa-2ab+bb$

13) $(3a+5b-\frac{7}{2}c)\times(a-2b+9c)=3aa-ab+\frac{47}{2}ac$
$-10bb+52bc-\frac{63}{2}cc$

14) $(3c-5d+\frac{3}{4}g-\frac{5}{3}h)\times(\frac{2}{3}c-d+7g+\frac{1}{2}h)=2cc$
$-\frac{19}{3}cd+\frac{43}{2}cg+\frac{7}{18}ch+5dd-\frac{143}{4}dg-\frac{5}{6}dh+\frac{21}{4}gg$
$-\frac{271}{24}gh-\frac{5}{6}hh$

15) $(5ab+3ac-4bc)\times(7ab-18ac+2bc+d)$
$=35aabb-69aabc-18abbc+5abd-54aacc$
$+78abcc+3acd-8bbcc-4bcd$

16) $(13bcd+20bce-10bde)\times(4bc+3bd-12e)$
$=52bbccd+80bbcce+20bbcde+39bbcdd$
$-30bbdde-156bcde-240bcee+120bdee$

17) $(5aa-3ab+7bb)\times(3a-b)=15aaa-14aab$
$+24abb-7bbb$

18) $(a+b+c)\times(a+b-c)=aa+2ab+bb-cc$

19) $(3aaa+35aab-17abb-13bbb)\times(3aa+26ab-57bb)=9aaaaa+183aaaab+688aaabb-2476aabbb+631abbbb+741bbbbb$

20) $(3a-b+2c-3d+5e)\times(17a-2b+12c)=51aa-23ab+70ac-51ad+85ae+2bb-16bc+6bd-10bc+24cc-36cd+60ce$

21) $(a+b+c+d)\times(a-b-c-d)=aa-bb-2bc-2bd-cc-2cd-dd$

22) $(-2a+3b-cc)\times(-3f-7a+cc)=6af-9bf+3ccf+14aa-21ab+5acc+3bcc-cccc$

23) $(\frac{3}{2}m-5n-\frac{1}{3}pp)\times(\frac{1}{4}m-2n+6pp)=\frac{3}{8}mm-\frac{17}{4}mn+\frac{107}{12}mpp+10nn-\frac{88}{3}npp-2pppp$

24) $\left(\frac{5ff}{g}-\frac{7fg}{4h}+3f\right)\times\left(\frac{7g}{f}+\frac{2f}{g}\right)=35f-\frac{49gg}{4h}+21g+\frac{10fff}{gg}-\frac{7ff}{2h}+\frac{6ff}{g}$

25) $\left(\frac{aa}{xx}-\frac{ab}{2xy}+\frac{bb}{yy}\right)\times\left(\frac{3aa}{xx}-\frac{2ab}{5xy}+\frac{bb}{yy}\right)=\frac{3aaaa}{xxxx}-\frac{19aaab}{10xxxy}+\frac{21aabb}{5xxyy}-\frac{9abbb}{10xyyy}+\frac{bbbb}{yyyy}$

---

4) Division.

a) Division einfacher Größen.

1) $a:b=\frac{a}{b}$

2) $-a:b=-\frac{a}{b}$

3) $a:-b=-\frac{a}{b}$

4) $-a:-b=\frac{a}{b}$

5) $5a:3b=\frac{5a}{3b}$

6) $-16a:8b=-\frac{2a}{b}$

7) $12a:-4b=-\frac{3a}{b}$

8) $-14a:-4b=\frac{7a}{2b}$

9) $abc : a = bc$ 10) $abc : ad = \frac{bc}{d}$

11) $8fmn : -2fgm = -\frac{4n}{g}$

12) $-12abcde : -8acd = \frac{3be}{2}$

13) $6abde : -2bf = -\frac{3ade}{f}$

14) $27aaabbcfg : -18abcghk = -\frac{3aabf}{2hk}$

15) $35abfgm : 5aabffgmn = \frac{7}{afn}$

16) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

17) $\frac{3afx}{bc} : \frac{2fxx}{5cde} = \frac{15ade}{2bx}$

18) $3fm : -\frac{3am}{5bg} = -\frac{5bfg}{a}$

19) $\frac{2ay}{5bcx} : 3ac = \frac{2y}{15bccx}$

20) $\frac{1}{7fggl} : \frac{1}{4fln} = \frac{4n}{7gg}$

21) $\frac{3}{4}ac : \frac{5}{6}abd = \frac{9c}{10bd}$

b) Division zusammengesetzter Größen.

1) $\left(3ac - 2ade - f + \frac{c}{d}\right) : 2a = \frac{3c}{2} - de - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad}$

2) $(18acf - 6bdef - 2ad) : 3adf = \frac{6c}{d} - \frac{2be}{a} - \frac{2}{3f}$

3) $(8aa - 6ab + 4c + 1) : -2a = -4a + 3b - \frac{2c}{a} - \frac{1}{2a}$

4) $(12acfg - 4affg + 3fggh) : 4aabbfg = \frac{3c}{abb} - \frac{f}{abb} + \frac{3gh}{4aabb}$

5) $\left(\frac{a}{b}+\frac{fd}{2c}-3ac+7\right):\frac{3c}{d}=\frac{ad}{3bc}+\frac{fdd}{6cc}-ad+\frac{7d}{3c}$

6) $(ab - ac) : (b - c) = a$

7) $(ac - bc + ad - bd) : (a - b) = c + d$

8) $(4aa + 6ab - 4ax + 9bx - 15xx) : (2a + 3x)$
$= 2a + 3b - 5x$

9) $(14af - 21bf + 7cf + 6ag - 9bg + 3cg) :$
$(7f + 3g) = 2a - 3b + c$

10) $(4xxx + 4xx - 29x + 21) : (2x - 3) = 2xx$
$+ 5x - 7$

11) $(\frac{3}{2}xxx - \frac{5}{4}xx - 8x + 9) : (\frac{1}{2}x - 1) = 3xx + \frac{7}{2}x - 9$

12) $(aa + ab + 2ac - 2bb + 7bc - 3cc) : (a + 2b - c)$
$= a - b + 3c$

13) $(12aa + 26ab - 36ac + 18ad - 10bb + 29bc - 6bd$
$- 21cc + 9cd) : (6a - 2b + 3c) = 2a + 5b - 7c$
$+ 3d$

14) $(119cc - 200cd + 408ce - 113cf - 39dd + 72de$
$+ 37df - 96ef + 20ff) : (17c + 3d - 4f) = 7c$
$- 13d + 24e - 5f$

15) $\left(3aa - \frac{7ab}{2} - \frac{21ac}{4} - \frac{5bb}{2} + \frac{83bc}{8} - \frac{3cc}{2}\right)$
$: \left(3a - 5b + \frac{3c}{4}\right) = a + \frac{b}{2} - 2c$

16) $\left(2ff - \frac{55fh}{12} + \frac{29fx}{9} + \frac{21hh}{8} - \frac{15hx}{4} + \frac{xx}{3}\right)$
$: \left(\frac{2f}{3} - \frac{3h}{4} + x\right) = 3f - \frac{7h}{2} + \frac{x}{3}$

17) $(30aab - 6aac + 75abb - 15abc) : (15ab - 3ac)$
$= 2a + 5b$

18) $(36aab - 63abb + 20bbb) : (12ab - 5bb)$
$= 3a - 4b$

19) $(72xxxx - 78xxxy - 10xxyy + 17xyyy + 3yyyy)$
$: (6xx - 4xy - yy) = 12xx - 5xy - 3yy$

9) $abc : a = bc$ 10) $abc : ad = \frac{bc}{d}$

11) $8fmn : -2fgm = -\frac{4n}{g}$

12) $-12abcde : -8acd = \frac{3be}{2}$

13) $6abde : -2bf = -\frac{3ade}{f}$

14) $27aaabbcfg : -18abcghk = -\frac{3aabf}{2hk}$

15) $35abfgm : 5aabffgmn = \frac{7}{afn}$

16) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

17) $\frac{3afx}{bc} : \frac{2fxx}{5cde} = \frac{15ade}{2bx}$

18) $3fm : -\frac{3am}{5bg} = -\frac{5bfg}{a}$

19) $\frac{2ay}{5bcx} : 3ac = \frac{2y}{15bccx}$

20) $\frac{1}{7fggl} : \frac{1}{4fln} = \frac{4n}{7gg}$

21) $\frac{3}{4}ac : \frac{5}{6}abd = \frac{9c}{10bd}$

b) Division zusammengesetzter Größen.

1) $\left(3ac - 2ade - f + \frac{c}{d}\right) : 2a = \frac{3c}{2} - de - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad}$

2) $(18acf - 6bdef - 2ad) : 3adf = \frac{6c}{d} - \frac{2be}{a} - \frac{2}{3f}$

3) $(8aa - 6ab + 4c + 1) : -2a = -4a + 3b - \frac{2c}{a} - \frac{1}{2a}$

4) $(12acfg - 4affg + 3fggh) : 4aabbfg = \frac{3c}{abb} - \frac{f}{abb} + \frac{3gh}{4aabb}$

31) $(aaaa - 9aabb - 6abcc - cccc) : (aa - 3ab - cc)$
$= aa + 3ab + cc$

32) $(aaaa - bbbb) : (a - b) = aaa + aab + abb$
$+ bbb$

33) $(32aaaaa + bbbbb) : (2a + b) = 16aaaa - 8aaab$
$+ 4aabb - 2abbb + bbbb$

34) $$\left(\frac{9aabb}{4cc} - \frac{25ffmm}{gg} + \frac{70dfm}{g} - 49dd\right)$$
$$: \left(\frac{3ab}{2c} + \frac{5fm}{g} - 7d\right) = \frac{3ab}{2c} - \frac{5fm}{g} + 7d.$$

e) Partialdivision für die Fälle, wo der Divisor in den Dividend nicht aufgehet.

1) $$1 : (1 - b) = 1 + \frac{b}{1 - b}$$
$$= 1 + b + \frac{bb}{1 - b}$$
$$= 1 + b + bb + \frac{bbb}{1 - b}$$
$$= 1 + b + bb + bbb + \frac{bbbb}{1 - b}$$
$$= 1 + b + bb + bbb + bbbb + \ldots$$

2) $$1 : (1 + b) = 1 - \frac{b}{1 + b}$$
$$= 1 - b + \frac{bb}{1 + b}$$
$$= 1 - b + bb - \frac{bbb}{1 + b}$$
$$= 1 - b + bb - bbb + \frac{bbbb}{1 + b}$$
$$= 1 - b + bb - bbb + bbbb - \ldots$$

3) $c : (a-b) = \frac{c}{a} + \frac{bc}{a(a-b)}$

$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aa(a-b)}$

$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaa(a-b)}$

$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaaa} + \ldots$

4) $c : (a+b) = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a(a+b)}$

$= \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aa(a+b)}$

$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} - \frac{bbbc}{aaa(a+b)}$

$= \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} - \frac{bbbc}{aaaa} + \ldots$

5) $(1+x) : (1-x) = 1 + \frac{2x}{1-x}$

$= 1 + 2x + \frac{2xx}{1-x}$

$= 1 + 2x + 2xx + \frac{2xxx}{1-x}$

$= 1 + 2x + 2xx + 2xxx + \ldots$

III. Rechnung mit Potenzen.

Was heißt eine Potenz in der Größenlehre? Was ihr Exponent? Was ihre Grundzahl (Basis)? — Aendert sich etwa die Größe oder der Werth einer Potenz, wenn die Grundzahl mit dem Exponenten vertauscht wird? — Wie werden Potenzen von gleicher Grundzahl multiplicirt und

dividirt? Wie verhält man sich, wenn die Grundzahlen verschieden sind? — Sollte man bei der Division auf Potenzen mit dem Exponenten 0 oder gar mit negativen Exponenten gerathen: welche Bedeutung muß man alsdann einer solchen Potenz unterlegen? Sind die vorigen Regeln der Multiplikation und Division auch auf solche Potenzen noch anwendbar? — Der Exponent 1 kann weggelassen, auch wieder hinzugedacht werden, wenn es nöthig seyn sollte. — Findet bei der Addition und Subtraktion der Potenzen auch eine Verkürzung statt? Und unter welchen Umständen? — Was wird erfordert, wenn bei den Produkten und Quotienten von Potenzen eine ähnliche Verkürzung statt haben soll? — Wenn in einem Bruche eine Potenz aus dem Zähler in den Nenner, und umgekehrt aus dem Nenner in den Zähler gebracht werden soll: welche Veränderung muß mit dem Exponenten dieser Potenz vorgenommen werden?

---

1) Addition und Subtraktion.

1) $ax^n + bx^n + cx^n + dx^n = (a + b + c + d)x^n$

2) $ax^n + bx^n - cx^n - dx^n = (a + b - c - d)x^n$

3) $10a^4 + 3a^4 + 6a^4 - a^4 - 5a^4 = 13a^4$

4) $3a^{-7} + 10a^{-7} - 5a^{-7} + a^2b = 8a^{-7} + a^2b$

5) $6^4 + 2 \cdot 8^3 + 3^2 - 19 \cdot 6^4 + 5 \cdot 8^3 = 7 \cdot 8^3 - 18 \cdot 6^4 + 3^2$

6) $16a^4b^3c^5 - 6a^4b^3c^5 + 7a^4b^3c^5 = 17a^4b^3c^5$

7) $\frac{5a^3}{b^4} - \frac{7a^3}{b^4} + \frac{11a^3}{b^4} + a^4 = \frac{9a^3}{b^4} + a^4$

8) $a^nb^m - 9a^m + 5a^nb^m + 6a^m + 10a^nb^m = 16^nb^m - 3a^m$

9) $5a^{-3}b^2 + 7ab^2c - 3a^mb^{-5} - 12ab^2c + 6a^{-3}b^2 - 9a^3b^3 + b^{-x} - 8a^mb^{-5} - 3b^{-x} = 11a^{-3}b^2 - 5ab^2c - 11a^mb^{-5} - 9a^3b^3 - 2b^{-x}$

10) $3\cdot 2^{-7} + 5^6 - 8\cdot 2^{-7} + 3a^nb^{-m} - 13\cdot 5^6 + 4a\cdot 2^{-7} + ca^nb^{-m} = (4a-5)2^{-7} - 12\cdot 5^6 + (c+3)a^nb^{-m}$

11) Zur Add.

$$\begin{array}{rrr} 5a^4b & +\ 3a^{-2}b^2c & -\ 7ab \\ -6a^4b & +\ 2a^{-2}b^2c & +\ 17ab \\ 9a^4b & -\ 8a^{-2}b^2c & -\ 10ab \\ \hline 8a^4b & -\ 3a^{-2}b^2c & \end{array}$$

12) Zur Add.

$$\begin{array}{l} 5a^mb^p + 3a^{-3}b^{m-1} - \dfrac{3a^3}{x^p} \\ -3ca^mb^p + 4g^2a^{-3}b^{m-1} - a + \dfrac{10a^3}{x^p} \\ a^mb^p + a + 3a^2b^2 - 2g^2a^{-3}b^{m-1} \\ \hline (6-3c)a^mb^p + (2g^2+3)a^{-3}b^{m-1} + \dfrac{7a^3}{x^p} + 3a^2b^2 \end{array}$$

13) Zur Add.

$$\begin{array}{l} 9a^{-3}b^{-2}c^4 - \dfrac{7b}{a^3} \\ \dfrac{18b}{a^3} - 5a^nb^m + c^x - 3\cdot 2^5 \\ 3a^nb^m - ha^{-3}b^{-2}c^4 + 3c^x - 5\cdot 2^5 \\ \hline (9-h)\,a^{-3}b^{-2}c^4 - 2a^nb^m + \dfrac{11b}{a^3} + 4c^x - 8\cdot 2^5 \end{array}$$

14) Zur Subt.

$$\begin{array}{l} 9a^mx^2 - 13 + 20ab^3x - 4b^mcx^2 \\ 3b^mcx^2 + 9a^mx^2 - 6 + 3ab^3x \\ \hline 17ab^3x - 7b^mcx^2 - 7 \end{array}$$

15) Zur Subt.

$$\begin{array}{l} 5a^4 - 7a^3b^2 - 3c^{-1}d^2 + 7d \\ 3a^4 - 15a^3b^2 - 7c^{-1}d^2 - 3a^2 \\ \hline 2a^4 + 8a^3b^2 + 4c^{-1}d^2 + 7d + 3a^2 \end{array}$$

2) Multiplikation.

a) Multiplikation einfacher Größen.

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $a^{-m} \times a^n = a^{-m+n} = a^{n-m}$

3) $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$

4) $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

5) $5a^3 \times a^7 \times 7a^5 \times 3a^6 = 105a^{21}$

6) $11a^{-2} \times 2a^{-5} \times 4a^6 \times 9a^7 = 792a^6$

7) $2a^{-3} \times 7a^{-9} \times -3a^6 = -42a^{-6} = -\frac{42}{a^6}$

8) $a^{-5}b \times a^{-7}d \times 10a = 10a^{-11}bd = \frac{10bd}{a^{11}}$

9) $3 \cdot 7^{-9} \times 7^{-2} \times 4 \cdot 7^8 = 12 \cdot 7^{-3} = \frac{12}{343}$

10) $-a^{p-q} \times -3a^{3q-2}f \times 5a^{p+7}cx = 15a^{2p+2q+5}fcx$

11) $5a^3b^{-4} \times 10a^2b^5c \times -3a^7 = -150a^{12}bc$

12) $-7a^{-1}b^4c^{-5} \times 3a^2b^{-5}c = -21ab^{-1}c^{-4} = -\frac{21a}{bc^4}$

13) $5a^3b^4 \times a^2b^8 \times 4acb^{-3} = 20a^6b^9c$

14) $h^4l^{11}x \times h^{-7}l^{-9} \times 3h^{-2}l^{-6}x^3 = 3h^{-5}l^{-4}x^4 = \frac{3x^4}{h^5l^4}$

15) $-13a^{-1}c^{-3} \times -4a^{-3}b^{-6}c^2 = 52a^{-4}b^{-6}c^{-1} = \frac{52}{a^4b^6c}$

16) $-\frac{5}{2}a^{-2}b^3c^{-m}d^{-1} \times \frac{2}{3}a^2b^{-3}c^{-2}d^4 = -\frac{5}{3}c^{-m-2}d^3$
$= -\frac{5d^3}{3c^{m+2}}$

17) $a^{-m}b^pc^q \times a^nb^{-r}c^s \times a^{n+m}b = a^{2n}b^{p-r+1}c^{q+s}$

18) $f^xg^{m-1}hd \times 2f^{m+3}h^{2-m} \times 4g^{2m+1}h^{m+2}d^3 =$
$8f^{x+m+3}g^{3m}h^5d^4$

19) $(a+y)^{-3}h^5l^4 \times (a+y)^{m+3}l^{-4}m \times (a+y)$
$= mh^5(a+y)^{m+1}$

20) $\frac{18a^{-5}b^3}{7c^{-2}d^{-6}} \times \frac{4a^6b^{-5}}{9c^3d^9} = \frac{72ab^{-2}}{63cd^3} = \frac{8a}{7cd^3b^2}$

21) $\frac{6a^4b^5c^{-7}}{11f^3dg^{-4}} \times \frac{3a^{-2}b^4c^{-1}}{5g^2f^6} = \frac{18a^2b^9c^{-8}}{55f^9dg^{-2}} = \frac{18a^2b^9g^2}{55f^9dc^8}$

22) $\frac{1}{3a^{-3}b^{-m}c} \times \frac{1}{4a^{-p}b} = \frac{1}{12a^{-p-3}b^{-m+1}c} = \frac{a^{p+3}b^{m-1}}{12c}$

23) $\frac{2a^{-m-3}b^{m+2}}{3x^{-5}y^{-n}z^p} \times \frac{6a^{-1}b^{-m}}{x^{-p}y^3} = \frac{12a^{-m-4}b^2}{3x^{-p-5}y^{-n+3}z^p}$
$= \frac{4b^2x^{p+5}y^{n-3}}{a^{m+4}z^p}$

24) $\frac{3a^{-5}b^2c^8f^4}{(a+b)^{-m}(c^2+x^2)} \times \frac{a^2b^{-5}c^{-2}f^{-4}}{(a+b)^{m-2}(c^2+x^2)^{-n+4}}$
$= \frac{3a^{-3}b^{-3}c}{(a+b)^{-2}(c^2+x^2)^{-n+5}} = \frac{3c(a+b)^2(c^2+x^2)^{n-5}}{a^3b^3}$

b) Multiplikation zusammengesetzter Größen.

1) $(a^2 - 3ab - 5b^2) \times 4a^2b - 4a^4b - 12a^3b^2$
$- 20a^2b^3$

2) $(2a^3b^5 - 5a^2c^6 + 9a^3b^2c^3) \times 3a^2bc^2 = 6a^5b^6c^2$
$- 15a^4bc^8 + 27a^5b^3c^5$

3) $(7h^{-5}l + \frac{2l^3}{h^4} - 3ah^{-3}l^2 + 7) \times - 8h^4l^{-5}$
$= - 56h^{-1}l^{-4} - 16l^{-2} + 24ahl^{-3} - 56h^4l^{-5}$
$= \frac{24ah}{l^3} - \frac{56}{hl^4} - \frac{56h^4}{l^5} - \frac{16}{l^2}$

4) $\left(a^3b^{-4} - cb^{-5}d^3f + \frac{3c^m}{k^3}\right) \times 2bc^{-2}d = 2a^3b^{-3}c^{-2}d$
$-2b^{-4}c^{-1}d^4f + \frac{6bc^{m-2}d}{k^3} = \frac{2a^3d}{b^3c^2} - \frac{2d^4f}{b^4c} + \frac{6bc^{m-2}d}{k^3}$

5) $(a^{m-1}b^{2m+3} - 6a^{3-m}b^p + ab^{-m}) \times a^{3m+2}b^{m-1}$
$= a^{4m+1}b^{3m+2} - 6a^{2m+5}b^{p+m-1} + \frac{a^{3m+3}}{b}$

6) $(a+b) \times (a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

7) $(a-b) \times (a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

8) $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$

9) $(a^4 - 2b^3) \times (a-b) = a^5 - 2ab^3 - a^4b + 2b^4$

10) $(x^2 - 3x - 7) \times (x-2) = x^3 - 5x^2 - x + 14$

11) $(3k^2 - 5kl + 2l^2) \times (k^2 - 7kl) = 3k^4 - 26k^3l$
$+ 37k^2l^2 - 14kl^3$

12) $(6f^2 - 17fl + 3l^2) \times (f^5 + 4f^4l) = 6f^7 + 7f^6l$
$- 65f^5l^2 + 12f^4l^3$

13) $(4a^2 - 16ax + 3x^2) \times (5a^3 - 2a^2x) = 20a^5 - 88a^4x$
$+ 47a^3x^2 - 6a^2x^3$

14) $(a^2 + a^4 + a^6) \times (a^2 - 1) = a^8 - a^2$

15) $(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4) \times (a + 2b)$
$= a^5 + 32b^5$

16) $(2a^4x^2 - 3b^4y^2) \times (2a^4x^2 + 3b^4y^2) = 4a^8x^4 - 9b^8y^4$

17) $(7a^3 - 5a^2b + 6ab^2 - 2b^3) \times (3a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2)$
$= 21a^7 - 43a^6b + 150a^5b^2 - 110a^4b^3 + 104a^3b^4$
$- 32a^2b^5$

18) $(\frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2) \times (2x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2) = 5x^4$
$+ \frac{7}{2}ax^3 - \frac{107}{12}a^2x^2 + \frac{5}{6}a^3x + \frac{7}{6}a^4$

19) $(a^6 - 3a^4b^2 + 5a^2b^4) \times (7a^4 - 4a^2b^2 + b^4)$
$= 7a^{10} - 25a^8b^2 + 48a^6b^4 - 23a^4b^6 + 5a^2b^8$

20) $(a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5)$
$\times(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=a^8-8a^7b+28a^6b^2$
$-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$

21) $(a^2+az+z^2)\times(a^2-az+z^2)=a^4+a^2z^2+z^4$

22) $(15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6)\times(8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4)$
$120a^{-8}b^4-101a^{-7}b^6+69a^{-6}b^8-18a^{-5}b^{10}$

23) $(13a^{-5}b+10a^{-2}b^2-4ab^3)\times(6a^{-3}b^2-18b^3$
$-7a^3b^4)=78a^{-8}b^3-174a^{-5}b^4-295a^{-2}b^5$
$+2ab^6+28a^4b^7$

24) $(3x^{-2}y^{-7}-2x^2y^{-5}+8x^6y^{-3})\times(2x^{-3}y^{-5}+6xy^{-3}$
$+12x^5y^{-1})=6x^{-5}y^{-12}+14x^{-1}y^{-10}+40x^3y^{-8}$
$+24x^7y^{-6}+96x^{11}y^{-4}$

25) $(5a^3b^3c^2-6a^4b^2c^5+7a^8b^5c^6)\times(2a^3b^3c^2$
$+3a^4b^2c^5-6a^7b^4c^3)=10a^6b^6c^4+3a^7b^5c^7$
$+14a^{11}b^8c^8-18a^8b^4c^{10}+21a^{12}b^7c^{11}$
$-30a^{10}b^7c^5+36a^{11}b^6c^8-42a^{15}b^9c^9$

26) $(14a^5c^2-6a^2bc^2+c^3)\times(14a^5c^2+6a^2bc^2-c^3)$
$=196a^{10}c^4-36a^4b^2c^4+12a^2bc^5-c^6$

27) $\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{2c^3d^4}{b^5}-\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)\times\left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{2c^3d^4}{b^5}+\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)$
$=\frac{a^4}{b^6}-\frac{4c^6d^8}{b^{10}}+\frac{14c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}$

28) $(a^m+b^p-2c^n)\times(2a^m-3b)=2a^{2m}+2a^mb^p$
$-4a^mc^n-3a^mb-3b^{p+1}+6bc^n$

29) $(2a^{3-2m}b^{n+3}+3a^{m+1}b^{n+2}+c^p)\times(a^{m-1}b^{1-2m}-ca^p)$
$=2a^{2-m}b^{n-2m+4}+3a^{2m}b^{n-2m+3}+a^{m-1}b^{1-2m}c^p$
$-2ca^{p-2m+3}b^{n+3}-3ca^{p+m+1}b^{n+2}-a^pc^{p+1}$

30) $(x^{-3p}+3a^mx^{-2p}-10a^{2m}x^{-p})\times(a^2x^q+5a^{m+2}x^{q+p}$
$-2a^{2m+2}x^{q+2p})=a^2x^{q-3p}+8a^{m+2}x^{q-2p}$
$+3a^{2m+2}x^{q-p}-56a^{3m+2}x^q+20a^{4m+2}x^{q+p}$

31) $(3a^{4-3m}bc^{m-2}+17a^{-3}b^{m+1})\times(3a^{6m-2}b^{2m}c^{3-4m}-8)$
$= 9a^{3m+2}b^{2m+1}c^{1-3m}+51a^{6m-5}b^{3m+1}c^{3-4m}$
$-24a^{4-3m}bc^{m-2}-136a^{-3}b^{m+1}$

Die Formeln 6, 7, 8, b) enthalten wichtige Sätze: wie lassen sich dieselben durch Worte darstellen?

---

3) Division.

a) Division einfacher Größen.

1) $a^m : a^n = a^{m-n}$

2) $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$

3) $a^{-m} : a^n = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

4) $a^{-m} : a^{-n} = a^{n-m}$

5) $8a^{10} : 2a^4 = 4a^6$

6) $\frac{7}{3}a^3 : \frac{2}{5}a^7 = \frac{35}{6}a^{-4} = \frac{35}{6a^4}$

7) $\frac{14}{5}a^{-8} : -3a = -\frac{14}{15}a^{-9} = -\frac{14}{15a^9}$

8) $ca^{18} : da^{-6} = \frac{ca^{24}}{d}$

9) $6(a+b)^{-9} : 4(a+b)^{-5} = \frac{3}{2}(a+b)^{-4} = \frac{3}{2(a+b)^4}$

10) $\frac{5}{3}a^{-7}b^3c : \frac{1}{2}a^{-9}b^{-5}c^3f = \frac{10a^2b^8}{3c^2f}$

11) $(a+x)^2(a+y)^{-3} : (a+x)^{-4}(a+y)^{-7}$
$= (a+x)^6(a+y)^4$

12) $-3a^mb^n : -4a^pb^qc^r = \frac{3a^{m-p}b^{n-q}}{4c^r}$

13) $-\frac{5c^2a^{-m}b^n}{8} : 3cd^5a^pb^{-q} = -\frac{5cb^{n+q}}{23d^5a^{m+p}}$

14) $\frac{3a^8d}{2b^5} : \frac{b^8}{4a^2c^7} = \frac{6a^5c^7d}{b^8}$

15) $\frac{2c^3(1+z^2)^2}{d^7z^9} : \frac{5c^8f^3(1+z^2)^{-6}}{2d^9z^5} = \frac{4d^2(1+z^2)^8}{5c^5f^3z^4}$

16) $\frac{2x^{3n-5m}y^{2n-3}}{7a^mb^3c} : \frac{4x^{1-5m}}{3ab^{n-1}y^5} = \frac{3b^{n-4}y^{2n+2}x^{3n-1}}{14a^{m-1}c}$

b) Division zusammengesetzter Größen.

1) $(6a^3b^2 - 10a^2f + 7a^4bx) : 2a^2 = 3ab^2 - 5f + \frac{7}{2}a^2bx$

2) $(\frac{3}{4}a^2x^5 - \frac{7}{9}ax^3 + 3ab^2x) : \frac{2}{3}a^2x^3 = \frac{9}{8}x^2 - \frac{7}{6a} + \frac{9b^2}{2ax^2}$

3) $\left(\frac{3a^2b^6}{4} - \frac{5ac}{b^7} + 2a^3c^2 - \frac{2a^2c^2}{5b(a+y)^2}\right) : -\frac{2a^5b^2}{3c}$
$= -\frac{9b^4c}{8a^3} + \frac{15c^2}{2a^4b^9} - \frac{3c^3}{a^2b^2} + \frac{3c^3}{5a^3b^3(a+y)^2}$

4) $(bc^3 - c^3x) : (b - x) = c^3$

5) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b$

6) $(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3) : (a - b) = a^2 + 2ab + b^2$

7) $(3a^5 + 16a^4b - 33a^3b^2 + 14a^2b^3) : (a^2 + 7ab)$
$= 3a^3 - 5a^2b + 2ab^2$

8) $(a^7 - 6a^6b^3 + 14a^5b^6 - 12a^4b^9) : (a^3 - 2a^2b^3)$
$= a^4 - 4a^3b^3 + 6a^2b^6$

9) $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 - b^2) = a^2 - b^2$

10) $[a^2bx^8 - (a^3b - a^5)x^7 - 8a^6x^6 + 7a^7x^5]$
$: (a^2x^2 - a^3x) = bx^6 + a^3x^5 - 7a^4x^4$

11) $(-a^8b^4 + 15a^{11}b^5 - 48a^{14}b^6 - 20a^{17}b^7)$
$: (10a^9b^2 - a^6b) = a^2b^3 - 5a^5b^4 - 2a^8b^5$

12) $(a^8 - 16z^8) : (a^2 - 2z^2) = a^6 + 2a^4z^2 + 4a^2z^4 + 8z^6$

13) $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4)$
$: (2a^2 - 3ab + 4b^2) = a^2 - 5ab + 6b^2$

14) $(4c^4 - 9b^2c^2 + 6b^3c - b^4) : (2c^2 - 3bc + b^2)$
$= 2c^2 + 3bc - b^2$

15) $(\frac{6}{4}x^5 - 4x^4 + \frac{77}{8}x^3 - \frac{43}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + 27)$
$: (\frac{1}{2}x^2 - x + 3) = \frac{3}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{4}x + 9$

16) $(-1 + a^3n^3) : (-1 + an) = 1 + an + a^2n^2$

17) $(3a^4b^{12} - 8a^7b^8 - \frac{51}{2}a^{10}b^6 + \frac{5}{4}a^{10}b^4 + \frac{17}{4}a^{13}b^2)$
$: (\frac{3}{2}a^3b^5 - \frac{1}{4}a^6b) = 2ab^7 - 5a^4b^3 - 17a^7b$

18) $(5a^5b^3c^5 - 22a^4b^3c^6 + 5a^3b^3c^7 + 12a^2b^3c^8$
$-7a^2b^2c^8 + 28ab^2c^9) : (a^2bc^2 - 4abc^3) = 5a^3b^2c^3$
$-2a^2b^2c^4 - 3ab^2c^5 - 7bc^6$

19) $\left(\frac{a^7b^2}{5} - \frac{47a^6b^3}{40} - \frac{9a^5b^4}{2} - 12a^4b^5\right) \left(\frac{2a^3b^2}{5}\right.$
$\left. - \frac{3a^2b^3}{4} + 6ab^4\right) = \frac{1}{2}a^4 - 2a^3b$

20) $(-2a^{-8}x^5 + 17a^{-4}x^6 - 5x^7 - 24a^4x^8) :$
$(2a^{-3}x^3 - 3ax^4) = -a^{-5}x^2 + 7a^{-1}x^3 + 8a^3x^4$

21) $\left(\frac{a^3c}{b^5} - \frac{a^4c}{b^4} - \frac{7a^5c}{b^3} - \frac{3a^6c}{b^2} + \frac{a^2c^3}{b^2} - \frac{2a^3c}{b} - a^4c^3\right)$
$: \left(\frac{a}{b^3} + \frac{3a^2}{b^2} + c^2\right) = \frac{a^2c}{b^2} - \frac{2a^3c}{b} - a^4c$

22) $(a^3d^3 - 3a^2cd^3 + 3ac^2d^3 - c^3d^3 + a^2c^2d^2 - ac^3d^2)$
$: (a^2d^2 - 2acd^2 + c^2d^2 + ac^2d) = ad - cd$

23) $(a^6 + 2a^3z^3 + z^6) : (a^2 - az + z^2) = a^4 + a^3z + az^3 + z^4$

24) $(\frac{1}{3} - 6z^2 + 27z^4) : (\frac{1}{3} + 2z + 3z^2) = 1 - 6z + 9z^2$

25) $(a^6 - 16a^3x^3 + 64x^6) : (a^2 - 4ax + 4x^2) =$
$(a^4 + 4a^3x + 12a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4$

26) $(a^{3m-2n}b^{2p}c - a^{2m+n-1}b^{1-p}c^n + a^{-n}b^{-1}c^m$
$+ a^{3m-n}b^{3p+2}c^n - a^{2m+2n-1}b^3c^{2n-1} + b^{p+1}c^{m+n-1})$
$: (a^{-n}b^{-p-1} + bc^{n-1}) = a^{3m-n}b^{3p+1}c - a^{2m+2n-1}b^2c^n$
$+ b^pc^m$

27) $(a^{m+n}b^n - 4a^{m+n-1}b^{2n} - 27a^{m+n-2}b^{3n} + 42a^{m+n-3}b^{4n}) : (a^n b^n - 7a^{n-1}b^{2n}) = a^m + 3a^{m-1}b^n - 6a^{m-2}b^{2n}$

28) $(a^n - b^n):(a-b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots \cdots + b^{n-1}$

e) Fälle, wo der Divisor in den Dividend nicht aufgeht.

1) $\frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + ax^4 - \cdots$

2) $\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \cdots$

3) $\frac{a}{x+1} = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} - \frac{a}{x^4} + \cdots$

4) $\frac{a}{x-1} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} + \frac{a}{x^4} + \cdots$

5) $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{a-b}{b^4}x^3 + \cdots$

6) $\frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 + \frac{a-b}{b^4}x^3 + \cdots$

7) $\frac{x+a}{x-b} = 1 + \frac{a+b}{x} + \frac{b(a+b)}{x^2} + \frac{b^2(a+b)}{x^3} + \cdots$

---

4) Potenzen von Potenzen.

1) $\left[\left((a^m)^n\right)^p\right]^q = a^{mnpq}$

2) $\left[\left((a^{-m})^{-n}\right)^p\right]^q = a^{mnpq}$

3) $\left[\left((a^{-m})^{-n}\right)^{-p}\right]^{-q} = a^{mnpq}$

4) $\left[\left((a^m)^{-n}\right)^{-p}\right]^{-q} = a^{-mnpq}$

5) $\left[(a^3\,bc^2)^5\right]^6 = a^{90}b^{30}c^{60}$

6) $(a^{-2}b^3c^{-5}f^6x^{-1})^{-3} = a^6b^{-9}c^{15}f^{-18}x^3$

7) $(a^mb^{-n}c^pd)^r = a^{mr}b^{-nr}c^{pr}d^r$

8) $(a^{3m-n}f^{2n-1}x^n)^{-3m} = a^{3mn-9mm}f^{3m-6mn}x^{-3mn}$

9) $[a^3(a+b)^2]^m = a^{3m}(a+b)^{2m}$

10) $\left(\frac{a^mb^nc^pd^{-q}}{f^ng^{-m}}\right)^{-r} = \frac{a^{-mr}b^{-nr}c^{-pr}d^{qr}}{f^{-nr}g^{mr}}$

11) $\left(\frac{a^4b^5}{c^3df}\right)^4 = \frac{a^{16}b^{20}}{c^{12}d^4f^4}$

12) $\left[\left(\frac{a^2b^3}{cd^5}\right)^{-1}\right]^{-2m} = \frac{a^{4m}b^{6m}}{c^{2m}d^{10m}} = \left(\frac{a^4b^6}{c^2d^{10}}\right)^m$

13) $(-a^2)^5 = -a^{10}$

14) $(-b^{-3})^4 = b^{-12}$

15) $\left[\left((-a)^3\right)^4\right]^5 = a^{60}$

16) $[(-a)^{-3}]^{-5} = -a^{15}$

17) $[(-a)^{-4}]^{-6} = a^{24}$

18) $(-a)^{2m} = a^{2m}$

19) $(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}$

20) $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right]^{-4} = \frac{b^{12}}{a^{12}}$

IV. Ausziehung der Wurzeln und Rechnung mit Wurzelgrössen.

Was heißt die Wurzel aus einer Zahl ziehen? Und was ist eine Wurzelgröße? — Giebt es auch Zahlen, woraus die Wurzel weder durch ganze Zahlen, noch durch gewöhnliche Brüche ausgedrückt werden kann? Und wenn es solche geben sollte, wie läßt es sich erweisen? — Wie heißt eine Wurzelzahl, welche sich weder durch ganze Zahlen, noch durch Brüche darstellen läßt? — Was bezeichnen die Wörter commensurabel und incommensurabel? — Die Irrationalzahlen sind also, in Hinsicht auf ganze Zahlen und gewöhnliche Brüche, nothwendig incommensurable Größen. — Sind sie es aber auch unter einander? Und welche Beispiele lassen sich wohl anführen, wo sie es nicht sind? — Welche Verkürzung läßt sich bei der Addition und Subtraktion der Wurzelgrößen anbringen? Und was wird dazu erfordert? — Findet auch bei der Multiplikation und Division der Wurzelgrößen eine Verkürzung statt? Und welche? — Wie muß man es anfangen, um einer Wurzelgröße einen höheren Wurzelexponenten zu geben? Zu welchem Zwecke thut man dieses oft, da es doch an sich vortheilhafter ist, niedrige als hohe Wurzelzeiger zu haben?

---

1) Quadrat- und Cubikwurzeln aus Zahlen.

a) Quadratwurzeln.

1) $\sqrt{256} = 16$

2) $\sqrt{4096} = 64$

3) $\sqrt{61009} = 247$

10) $\sqrt[9]{\left(2^{36}a^{45}b^{9} \times \frac{(a+b)^{27}}{a^{9}}\right)} = 2^{4}a^{4}b\,(a+b)^{3}$

11) $\sqrt{\left(\frac{a^{2}b^{2}c^{2}}{d^{4}} \times \frac{1}{a^{6}b^{8}f^{4}}\right)} = \frac{c}{a^{2}b^{3}d^{2}f^{2}}$

b) Quadratwurzeln aus zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrücken.

1) $\sqrt{(a^{2} + 2ab + b^{2})} = a + b$

2) $\sqrt{(a^{2} - 2ab + b^{2})} = a - b$

3) $\sqrt{\left(a^{2} - ab + \frac{b^{2}}{4}\right)} = a - \frac{b}{2}$

4) $\sqrt{(x^{2} + 2x + 1)} = x + 1$

5) $\sqrt{(f^{6} + 6f^{3}x^{4} + 9x^{8})} = f^{3} + 3x^{4}$

6) $\sqrt{\left(\frac{9a^{8}}{4} + 2a^{4}n^{3} + \frac{4n^{6}}{9}\right)} = \frac{3a^{4}}{2} + \frac{2n^{3}}{3}$

7) $\sqrt{(\frac{25}{4}a^{2}b^{2} - \frac{5}{3}abc^{2} + \frac{1}{9}c^{4})} = \frac{5}{2}ab - \frac{1}{3}c^{2}$

8) $\sqrt{(x^{4} - ax^{3} + \frac{1}{4}a^{2}x^{2})} = x^{2} - \frac{1}{2}ax$

9) $\sqrt{(a^{2m} + 2a^{m}x^{n} + x^{2n})} = a^{m} + x^{n}$

10) $\sqrt{a^{2m} - 4a^{m+n} + 4a^{2n})} = a^{m} - 2a^{n}$

11) $\sqrt{\left(\frac{a^{2}}{b^{2}} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^{2}}{9c^{2}}\right)} = \frac{a}{b} - \frac{2b}{3c}$

12) $\sqrt{(a^{2} + 2ab + 2ac + b^{2} + 2bc + c^{2})} = a + b + c$

13) $\sqrt{\left(9x^{2} - 30ax - 3a^{2}x + 25a^{2} + 5a^{3} + \frac{a^{4}}{4}\right)}$
$= 3x - 5a - \frac{a^{2}}{2}$

14) $\sqrt{(4x^{4} + 8ax^{3} + 4a^{2}x^{2} + 16b^{2}x^{2} + 16ab^{2}x + 16b^{4})}$
$= 2x^{2} + 2ax + 4b^{2}$

15) $\sqrt{(9a^{2} - 6ab + 30ac + 6ad + b^{2} - 10bc - 2bd}$
$+ 25c^{2} + 10cd + d^{2}) = 3a - b + 5c + d$

16) $\sqrt{(\frac{9}{4}+6x-17x^2-28x^3+49x^4)} = \frac{3}{2}+2x-7x^2$

17) $\sqrt{(9x^4-3ax^3+6bx^3+\frac{a^2x^2}{4}-abx^2+b^2x^2)}$

$= 3x^2 - \frac{ax}{2} + bx$

18) $\sqrt{(\frac{4}{9}a^2x^4-\frac{4}{3}abx^3z+\frac{8}{3}a^2bx^2z^2+b^2x^2z^2-4ab^2xz^3}$
$\sqrt{+4a^2b^2z^4)} = \frac{2}{3}ax^2-bxz+2abz^2$

19) $\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{x^4+4ax^2+4a^2}} = \frac{a-b}{x^2+2a}$

20) $\sqrt{\frac{a^2x^2+2ab^2x^3+b^4x^4}{a^{2m}+2a^mx^n+x^{2n}}} = \frac{ax+b^2x^2}{a^m+x^n}$

21) $\sqrt{\Big(a^{2m}x^{2n} + 10ca^{2m-2}x^{2n+1} - 6a^{m+1}x^{n-1}}$

$\sqrt{+ 25c^2a^{2m-4}x^{2n+2} - 30ca^{m-1}x^n + \frac{9a^2}{x^2}\Big)}$

$= a^mx^n + 5ca^{m-2}x^{n+1} - \frac{3a}{x}$

22) $\sqrt{\Big(\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{2^8a^{m-1}b^xc}{d^{3p}}}$

$\sqrt{+ a^{2n}b^{4n-2}d^6 + \frac{2^9}{3}a^nb^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{16}b^{2x}}{9}\Big)}$

$= \frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} - a^nb^{2n-1}d^3 - \frac{2^8b^x}{3}$

e) Cubikwurzeln aus zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrücken.

1) $\sqrt[3]{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)} = a+b$

2) $\sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)} = a-b$

3) $\sqrt[3]{(x^3+6x^2+12x+8)} = x+2$

4) $\sqrt[3]{(8a^3-84a^2x+294ax^2-343x^3)} = 2a-7x$

5) $\sqrt[3]{(x^6-6cx^5+12c^2x^4-8c^3x^3)} = x^2-2cx$

6) $\sqrt[3]{(a^{3m} - 6a^{2m+1}x^n + 12a^{m+2}x^{2n} - 8a^3x^{3n})} = a^m - 2ax^n$

7) $\sqrt[3]{(8 - 12x^{3n-1} + 6x^{6n-2} - x^{9n-3})} = 2 - x^{3n-1}$

8) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3c^3}{b^3}x^6 - \frac{3a^2c}{b}x^5 + \frac{3ab}{c}x^4 - \frac{b^3}{c^3}x^3\right)} = \frac{ac}{b}x^2 - \frac{b}{c}x$

9) $\sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{3a^2b^2}{2c^2}x^{-2} + \frac{3a^4b}{4c^4}x^{-4} + \frac{a^6}{8c^6}x^{-6}\right)} =$

$b + \frac{a^2}{2c^2}x^{-2} = b + \frac{a^2}{2c^2x^2}$

10) $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)} = a + b + c$

11) $\sqrt[3]{(27z^6 - 54az^5 + 63a^2z^4 - 44a^3z^3 + 21a^4z^2 - 6a^5z + a^6)} = 3z^2 - 2az + a^2$

12) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3y^3}{b^6c^3} + \frac{3a^2cy^4}{b^4d} - \frac{3a^3y^2}{b^4c^2} + \frac{3ac^5y^5}{b^2d^2} - \frac{6a^2c^2y^3}{b^2d} + \frac{3a^3y}{b^2c} + \frac{c^9y^6}{d^3} - \frac{3ac^6x^4}{d^2} + \frac{3a^2c^3y^2}{d} - a^3\right)}$

$= \frac{ay}{b^2c} + \frac{c^3y^2}{d} - a$

13) $\sqrt[3]{(8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6)} = 2x^2 + 4cx - 3c^2$

14) $\sqrt[3]{[(a+b)^{6m}x^3 + 6ca^p(a+b)^{4m}x^2 + 12c^2a^{2p} \times (a+b)^{2m}x + 8c^3a^{3p}]} = (a+b)^{2m}x + 2ca^p$

d) Quadrat- und Cubikwurzeln aus unvollständigen Quadraten und Cuben.

1) $\sqrt{(a^2-x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \ldots$

2) $\sqrt{(a^2+x^2)} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \ldots$

3) $\sqrt{(1-x)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \ldots$

$$4)\ \sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$$

$$5)\ \sqrt[3]{(a^3-x^3)} = a - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} - \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} - \cdots$$

$$6)\ \sqrt[3]{(a^3+x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + \cdots$$

$$7)\ \sqrt[3]{(1-x)} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} - \cdots$$

$$8)\ \sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \cdots$$

Der Lehrer dürfte wohl thun, seinen Schülern den Nutzen dieser Reihen bei der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln an einigen Beispielen zu zeigen, indem er in den Formeln 1, 2, 5, 6 für a etwa die Zahlen 2, 3, 4, 5 2c. annimmt und $x=1$, in den Formeln 3, 4, 7, 8 hingegen $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ 2c. setzt.

---

3) Rechnung mit Wurzelgrößen.

a) Addition und Subtraktion.

$$1)\ b\sqrt[m]{a} + c\sqrt[m]{a} - d\sqrt[m]{a} = (b+c-d)\sqrt[m]{a}$$

$$2)\ 3\sqrt[6]{5} + 17\sqrt[6]{5} - 12\sqrt[6]{5} - 7\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5}$$

$$3)\ 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{5}{4}\sqrt{2}$$

$$4)\ 6\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}} - 2\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}} + a\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}} - \frac{2b}{c}\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}} = \left(4+a-\frac{2b}{c}\right)\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}$$

$$5)\ 5\sqrt[7]{9} - 2\sqrt[5]{14} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[5]{14} - 2\sqrt[7]{9}$$
$$= 3\sqrt[7]{9} - 7\sqrt[5]{14} + \sqrt[3]{2}$$

6) Zur Addition.

$$\begin{array}{l} 10\sqrt{2} + 5\sqrt[7]{8} - 7\sqrt[m]{5} + 2\sqrt[3]{a} \\ 5\sqrt{2} + \sqrt[7]{8} + 4\sqrt[m]{5} - 3\sqrt[3]{a} \\ -3\sqrt{2} - 9\sqrt[7]{8} - 3\sqrt[m]{5} + \sqrt[3]{a} + \sqrt{ab} \\ \hline 12\sqrt{2} - 3\sqrt[7]{8} - 6\sqrt[m]{5} + \sqrt{ab} \end{array}$$

7) Zur Addition.

$$\begin{array}{l} 13\sqrt[5]{12a^2bc} + 17\sqrt[m]{3} - 5\sqrt[n]{6} \\ 7\sqrt[5]{12a^2bc} + 2\sqrt[n]{6} + 3\sqrt[m]{3} - 2a\sqrt{c} + \frac{1}{2}\sqrt[7]{9a} \\ -20\sqrt[5]{12a^2bc} + 9\sqrt[5]{12a^2bc} + \sqrt{c} - 3\sqrt[7]{9a} \\ \hline 20\sqrt[m]{3} - 3\sqrt[n]{6} + 9\sqrt[5]{12a^2bc} - (2a-1)\sqrt{c} - \frac{5}{2}\sqrt[7]{9a} \end{array}$$

8) Zur Subt.

$$\begin{array}{l} 18\sqrt{7} - 5\sqrt{6} + 10\sqrt[4]{11} - 3\sqrt[3]{13} \\ 6\sqrt{7} - 2\sqrt{6} + \frac{17}{2}\sqrt[4]{11} + 2\sqrt[3]{13} \\ \hline 12\sqrt{7} - 3\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt[4]{11} - 5\sqrt[3]{13} \end{array}$$

9) Zur Subt.

$$\begin{array}{l} 16\sqrt[4]{6ab} - \sqrt[5]{9c^3} + 3\sqrt[m]{7a} - \sqrt{10} \\ -8\sqrt[5]{9c^3} - 5\sqrt[m]{7a} + 3\sqrt[4]{6ab} + 2\sqrt[4]{10} \\ \hline 13\sqrt[4]{6ab} + 7\sqrt[5]{9c^3} + 8\sqrt[m]{7a} - \sqrt{10} - 2\sqrt[4]{10} \end{array}$$

b) Verkürzungen und Verwandlungen.

1) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

2) $2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + 5\sqrt{72} - \sqrt{50} = 8\sqrt{2}$

3) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} = -13\sqrt{3}$

4) $8\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{29}{2}\sqrt{3} = \frac{29\sqrt{3}}{2}$

5) $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{28}{15}\sqrt{15}$

6) $7\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{128} = 8\sqrt[3]{2}$

7) $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt{28} + 2\sqrt{63} = 8\sqrt{7} - \sqrt[3]{3}$

8) $\sqrt[4]{32} + 2\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[3]{5}$

9) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{6} = \sqrt{45} - \sqrt{8} + \sqrt{54}$

10) $5\sqrt[3]{7} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{875} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{48}$

11) $4\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt[5]{512} + \sqrt[8]{54} - \sqrt{\tfrac{25}{3}}$

12) $\sqrt{45c^3} - \sqrt{80c^3} + \sqrt{5a^2c} = (a - c)\sqrt{5c}$

13) $\sqrt{18a^5b^3} + \sqrt{50a^3b^3} = (3a^2b + 5ab)\sqrt{2ab}$

14) $\sqrt[3]{16a^3b} + \sqrt{4a^2b} - \sqrt{a^2b} - \sqrt[3]{54a^3b} = a\sqrt{b} - a\sqrt[3]{2b}$

15) $\sqrt[4]{2^{14}a^{13}b^5c} - \sqrt[4]{4 \cdot 5^4a^5b^9c^5} + \sqrt[4]{4 \cdot 6^4ab^5c}$

$= (8a^3b - 5ab^2c + 6b)\sqrt[4]{4abc}$

16) $\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2cd^2}{be^2}} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{ac}{d} - \frac{ad}{c}\right)\sqrt{\frac{c}{b}}$

17) $\sqrt[3]{\frac{27a^5x}{2b}} - \sqrt[3]{\frac{a^2x}{2b}} = (3a - 1)\sqrt[3]{\frac{a^2x}{2b}}$

18) $3b^2\sqrt{a^3c} + \frac{2}{c}\sqrt{a^5c^3} - c^4\sqrt{\frac{ac}{b^2}}$

$= \left(3ab^2 + 2a^2 - \frac{c^4}{b}\right)\sqrt{ac}$

19) $5a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} + b\sqrt[3]{\frac{b^2c^3}{a}} = \left(\frac{5a}{b} + \frac{bc}{a}\right)\sqrt[3]{a^2b^2}$

20) $\sqrt[3]{54a^{m+6}b^3} - \sqrt[3]{16a^{m-3}b^6} + \sqrt[3]{2a^{4m+9}} + \sqrt[3]{2c^3a^m}$

$= \left(3a^2b - \frac{2b^2}{a} + a^{m+3} + c\right)\sqrt[3]{2a^m}$

21) $\sqrt[m]{2^ma^{mp+3}b^{mn+5}} + \sqrt[m]{3^ma^{2m-mn+3}b^{m+5}}$

$- \sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}} = (2a^pb^n + 3a^{2-n}b - c^2)\sqrt[m]{a^3b^5}$

22) $\sqrt[6]{\frac{3 \cdot 2^3c^3f^4}{d^4g}} + \sqrt[6]{\frac{2^3g^{11}}{3^5c^3d^4f^2}} = \left(\frac{f}{d} + \frac{g^2}{3cd}\right)\sqrt[6]{\frac{3 \cdot 2^3c^3d^2}{f^2g}}$

23) $\sqrt[2n]{\frac{a^{6n+4}b^{2n-3}c^{2mn}}{d^{9n+5}f^2g^{p+2n-1}}} = \frac{a^3bc^m}{d^4g}\sqrt[2n]{\frac{a^4}{d^{n+5}f^2g^{p-1}b^3}}$

6) $\sqrt[3]{(a^{3m} - 6a^{2m+1}x^n + 12a^{m+2}x^{2n} - 8a^3x^{3n})} = a^m - 2ax^n$

7) $\sqrt[3]{(8 - 12x^{3n-1} + 6x^{6n-2} - x^{9n-3})} = 2 - x^{3n-1}$

8) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3c^3}{b^3}x^6 - \frac{3a^2c}{b}x^5 + \frac{3ab}{c}x^4 - \frac{b^3}{c^3}x^3\right)} = \frac{ac}{b}x^2 - \frac{b}{c}x$

9) $\sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{3a^2b^2}{2c^2}x^{-2} + \frac{3a^4b}{4c^4}x^{-4} + \frac{a^6}{8c^6}x^{-6}\right)} =$

$b + \frac{a^2}{2c^2}x^{-2} = b + \frac{a^2}{2c^2x^2}$

10) $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)} = a + b + c$

11) $\sqrt[3]{(27z^6 - 54az^5 + 63a^2z^4 - 44a^3z^3 + 21a^4z^2 - 6a^5z + a^6)} = 3z^2 - 2az + a^2$

12) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3y^8}{b^6c^3} + \frac{3a^2cy^4}{b^4d} - \frac{3a^3y^2}{b^4c^2} + \frac{3ac^5y^5}{b^2d^2} - \frac{6a^2c^2y^3}{b^2d} + \frac{3a^3y}{b^2c} + \frac{c^9y^6}{d^3} - \frac{3ac^6x^4}{d^2} + \frac{3a^2c^3y^2}{d} - a^3\right)}$

$= \frac{ay}{b^2c} + \frac{c^3y^2}{d} - a$

13) $\sqrt[3]{(8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6)} = 2x^2 + 4cx - 3c^2$

14) $\sqrt[3]{[(a+b)^{6m}x^3 + 6ca^p(a+b)^{4m}x^2 + 12c^2a^{2p} \times (a+b)^{2m}x + 8c^3a^{3p}]} = (a+b)^{2m}x + 2ca^p$

d) Quadrat- und Cubikwurzeln aus unvollständigen Quadraten und Cuben.

1) $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \ldots$

2) $\sqrt{(a^2 + x^2)} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \ldots$

3) $\sqrt{(1 - x)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \ldots$

41) $\sqrt[3]{(2\sqrt{5})} = \sqrt[6]{20}$

42) $\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{b})} = \sqrt[mn]{a^n b}$

e) Multiplikation.

1) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$

2) $a\sqrt[n]{x} \times b\sqrt[n]{y} \times c\sqrt[n]{z} = abc\sqrt[n]{xyz}$

3) $\sqrt[3]{4} \times 7\sqrt[3]{6} \times \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} = \frac{7}{2}\sqrt[3]{120}$

4) $4 \times 2\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{72} = 8\sqrt{6}$

5) $5\sqrt{3} \times 7\sqrt{\frac{8}{3}} \times \sqrt{2} = 140$

6) $c\sqrt{a} \times d\sqrt{a} = acd$

7) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$

8) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{648000}$

9) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \times \sqrt[8]{3} = \sqrt[24]{\frac{256}{3}}$

10) $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[10]{3} \times \sqrt[15]{6} = \sqrt[30]{3981312}$

11) $\sqrt[7]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[14]{6} = \sqrt[42]{\frac{2}{27}}$

12) $a\sqrt[m]{x} \times b\sqrt[n]{y} \times c\sqrt[p]{z} = abc\sqrt[mnp]{x^{np}y^{mp}z^{mn}}$.

13) $\sqrt[12]{\frac{a}{bc}} \times \sqrt[8]{\frac{a^m}{b}} = \sqrt[24]{\frac{a^{3m+2}}{b^5c^2}}$

14) $\frac{ac}{b^3d^3}\sqrt[3]{\frac{bcd}{e}} \times \sqrt[6]{\frac{b^{10}d^7e}{a^2c^5}} = \frac{1}{bd}\sqrt[6]{\frac{a^4c^3}{d^3e}}$

15) $(\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10}) \times 2\sqrt{5} = 10+4\sqrt{35}+6\sqrt{50}$

16) $(\sqrt{6}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[4]{5}) \times \sqrt{3} = \sqrt{18}+\sqrt[6]{108}-2\sqrt[4]{45}$

17) $(3+\sqrt{5}) \times (2-\sqrt{5}) = 1-\sqrt{5}$

18) $(7+2\sqrt{6}) \times (9-5\sqrt{6}) = 3-17\sqrt{6}$

19) $(9-7\sqrt{13}) \times (5-6\sqrt{13}) = 591-89\sqrt{13}$

20) $(6+12\sqrt{7}) \times (3-5\sqrt{7}) = 6\sqrt{7}-402$

21) $(9\sqrt{12}+3) \times (5\sqrt{12}+8) = 564 + 87\sqrt{12}$

22) $(13-\sqrt{5}) \times (7+3\sqrt{5}) = 76 + 32\sqrt{5}$

23) $(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}) \times (\frac{1}{2}-7\sqrt{\frac{1}{2}}) = -8-\frac{37}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

24) $(-5-\sqrt{\frac{3}{4}}) \times (-5+\sqrt{\frac{3}{4}}) = 24\frac{1}{4}$

25) $(9+2\sqrt{10}) \times (9-2\sqrt{10}) = 41$

26) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times (2\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 1+\sqrt{6}$

27) $(5\sqrt{14}+3\sqrt{5}) \times (7\sqrt{14}-2\sqrt{5}) = 460+11\sqrt{70}$

28) $(2\sqrt{7}-5\sqrt{6}) \times \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}-2\sqrt{6}\right) = 81-\frac{23}{2}\sqrt{42}$

29) $(4\sqrt{\frac{7}{3}}+5\sqrt{\frac{1}{2}}) \times (\sqrt{\frac{7}{3}}+2\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{43}{3}+13\sqrt{\frac{7}{6}}$

30) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

31) $(\sqrt{7}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \sqrt{35}-\sqrt{15}-$
$\sqrt{14}+\sqrt{6}$

32) $(5-8\sqrt{7}) \times (9+10\sqrt{3}) = 45-72\sqrt{7}+50\sqrt{3}$
$-80\sqrt{21}$

33) $(7\sqrt{6}+2\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{6}) = 7\sqrt{30}+2\sqrt{15}$
$+42+2\sqrt{18}$

34) $(3\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}) \times (5\sqrt{\frac{5}{6}}+\sqrt{\frac{2}{7}}) = 15\sqrt{\frac{5}{12}}-5\sqrt{\frac{5}{18}}$
$+3\sqrt{\frac{1}{7}}-\sqrt{\frac{2}{21}}$

35) $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6}) \times (2\sqrt{8}-3) = 41\sqrt{6}-71\sqrt{3}$

36) $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5}) \times (4\sqrt{3}-\sqrt{10}) = 39\sqrt{2}-16\sqrt{15}$

37) $(\sqrt{12}-2\sqrt{7}) \times (2+\sqrt{21}) = 2\sqrt{7}-10\sqrt{3}$

38) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6}-2) \times (2\sqrt{5}+18\sqrt{6}) = 246+$
$58\sqrt{30}-4\sqrt{5}-36\sqrt{6}$

39) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}) \times (\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$
$= -174+42\sqrt{10}$

40) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-8\sqrt{6})\times(2+5\sqrt{2}-3\sqrt{12})$
$=30+4\sqrt{5}+150\sqrt{2}-34\sqrt{6}+10\sqrt{10}$
$-40\sqrt{12}-6\sqrt{60}$

41) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{7})\times(\sqrt{6}+5\sqrt{3}+\sqrt{10})$
$=3\sqrt{12}+2\sqrt{30}+\sqrt{42}+15\sqrt{6}+10\sqrt{15}$
$+5\sqrt{21}+3\sqrt{20}+2\sqrt{50}+\sqrt{70}$

42) $(\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{6})\times(3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{36})=12+3\sqrt[3]{20}$
$-6\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{180}$

43) $(5\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{16})\times(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4})=44-4\sqrt[3]{32}$
$-15\sqrt[3]{16}$

44) $(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})\times(2+\sqrt[3]{9})=4\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}$
$+6\sqrt[6]{3}$

45) $(5+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[4]{5})\times(\sqrt{6}+\sqrt{5})=5\sqrt{6}+5\sqrt{5}$
$+2\sqrt[4]{125}+2\sqrt[4]{180}+2\sqrt[6]{54}+\sqrt[6]{2000}$

46) $(a+\sqrt{b})\times(a-\sqrt{b})=a^2-b$

47) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

48) $(c\sqrt{a}+d\sqrt{b})\times(c\sqrt{a}-d\sqrt{b})=ac^2-bd^2$

49) $(a+\sqrt{x})\times(b+\sqrt{y})=ab+a\sqrt{y}+b\sqrt{x}+\sqrt{xy}$

50) $\left(\sqrt{\frac{ad^2}{c^3}}+\sqrt{\frac{a^2}{b}}\right)\times(\sqrt{ac}+\sqrt{b^3})=\frac{ad}{c}+ab$
$+\left(a+\frac{b^2d}{c^2}\right)\sqrt{\frac{ac}{b}}$

51) $\left(\sqrt{\frac{ac^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{1}{b}}\right)\times\left(\frac{c}{d}\sqrt{(a+b)a}-\sqrt{\frac{b^5}{c^2}}\right)=$
$\frac{ac^2}{d}-\frac{b^2}{c}+\left(\frac{c}{bd}-\frac{b^2}{a+b}\right)\sqrt{(a+b)ab}$

52) $(\sqrt{a}+c\sqrt[3]{b})\times(\sqrt{a}-c\sqrt[3]{b})=a-c^2\sqrt[3]{b^2}$

53) $(2\sqrt{a}+3c\sqrt[3]{b})\times(\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b})=2a+12c\sqrt[3]{b^2}$
$+(3c+8)\sqrt[6]{a^3b^2}$

54) $(c\sqrt[4]{a}+d\sqrt[4]{b}) \times (f\sqrt[4]{a}+g\sqrt[4]{b}) = cf\sqrt{a}+dg\sqrt{b}$
$+(df+cg)\sqrt[4]{ab}$

55) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})^2 = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+2\sqrt[4]{ab}$
$+2\sqrt[4]{ac}+2\sqrt[4]{bc}$

56) $\sqrt{(a+\sqrt{b})}\times\sqrt{(c+\sqrt{d})}=\sqrt{(ac+c\sqrt{b}+a\sqrt{d}}$
$+\sqrt{bd})$

57) $\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} \times \sqrt[n]{(a-\sqrt{b})} = \sqrt[n]{(a^2-b)}$

58) $\sqrt[m]{(a+\sqrt[n]{b})}\times\sqrt[m]{(c+\sqrt[p]{d})} = \sqrt[m]{(ac+c\sqrt[n]{b}+a\sqrt[p]{d}}$
$+\sqrt[np]{b^p d^n})$

59) $\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})} \times \sqrt{(3+\sqrt{6})} = \sqrt[4]{(147+60\sqrt{6})}$

60) $3\sqrt[n]{(2+4\sqrt[3]{3})} \times 4\sqrt[n]{(6+2\sqrt[3]{9})}=12\sqrt[n]{(36+4\sqrt[3]{9}}$
$+24\sqrt[3]{3})$

61) $5\sqrt{2} \times 3\sqrt{(4+6\sqrt{2})}=30\sqrt{(2+3\sqrt{2})}$

d) Division.

1) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

2) $c\sqrt[m]{a} : d\sqrt[m]{b} = \frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

3) $a : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b}}$

4) $a : \sqrt{a} = \sqrt{a}$

5) $2ab^2c^3 : 4\sqrt[3]{a^3bc^5d} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^5c^4}{d}}$

6) $\sqrt[5]{ab^{n-1}c^2} : \sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{dc^{n-1}}} = \sqrt[5]{\frac{b^{n-3}\,c^{n+1}\,d}{a^2}}$

7) $\sqrt[n]{\frac{f^3g^2}{dx^5}} : \sqrt[n]{\frac{fg}{dx}} = \sqrt[n]{\frac{f^2g}{x^4}}$

8) $\sqrt[3]{a^2bc} : \sqrt[5]{ab^2c^3} = \sqrt[15]{\frac{a^7}{bc^4}}$

9) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

10) $4\sqrt[3]{12} : 2\sqrt{3} = 2\sqrt[6]{\frac{16}{3}}$

11) $\sqrt[5]{64} : 2 = \sqrt[5]{2}$

12) $\sqrt[2n]{\frac{a^m b}{c^2 d}} : \sqrt[3n]{\frac{a^{m-1}c^3}{d^5}} = \sqrt[6n]{\frac{a^{m+2}b^3d^7}{c^{12}}}$

13) $c\sqrt{(a^2-x^2)} : \sqrt{(a+x)} = c\sqrt{(a-x)}$

14) $\sqrt{(ab^2-b^2c)} : \sqrt{(a-c)} = b$

15) $\sqrt{(a^2-z^2)} : (a-z) = \sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$

16) $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4) : \sqrt{8} = 5-\sqrt{2}$

17) $(\sqrt{6}+4\sqrt{18}-3-8\sqrt{2}) : \sqrt{3} = \sqrt{2}+4\sqrt{6}$
$-\sqrt{3}-8\sqrt{\frac{2}{3}}$

18) $(3\sqrt{15}-\sqrt{20}+\sqrt{10}-7) : 2\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{3}-1$
$+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{5}}$

19) $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+4) : 4\sqrt{8} = \frac{11}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$

20) $(6+2\sqrt{3}-\sqrt[3]{18}) : \sqrt{6} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$

21) $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}) : 2\sqrt{2} = 1+\frac{\sqrt[6]{18}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$

22) $1 : (\sqrt{3}+2) = 2-\sqrt{3}$

23) $3 : (1+\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}-3$

24) $12 : (5-\sqrt{21}) = 15+3\sqrt{21}$

25) $7 : (\sqrt{8}-2) = \frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)$

26) $\sqrt{3} : (2\sqrt{5}-3\sqrt{2}) = \sqrt{15}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$

27) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{6}} : (\sqrt{\frac{1}{2}}-2) = -\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{30}}{28}$

28) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} : (\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{10}$

29) $(1+\sqrt{2}) : (2-\sqrt{2}) = 2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

30) $(5-7\sqrt{3}) : (1+\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}-13$

31) $(6-3\sqrt{5}) : (\sqrt{5}-1) = \frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{9}{4}$

32) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}) : (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 5+2\sqrt{6}$

33) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}) : (2\sqrt{5}-\sqrt{18}) = 9+\frac{5}{2}\sqrt{10}$

34) $(6\sqrt{7}-3\sqrt{3}) : (\sqrt{5}-2) = 6\sqrt{35}+12\sqrt{7}$
$-3\sqrt{15}-6\sqrt{3}$

35) $1 : (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{30}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

36) $7 : (\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 35\sqrt{10}+77\sqrt{2}+63\sqrt{3}$
$+14\sqrt{60}$

37) $\sqrt{2} : (1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}) = \frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{10}-\frac{1}{2}$

38) $(2-\sqrt{3}) : (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 1+\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{4}\sqrt{6}$

39) $(3+4\sqrt{3}) : (\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}) = \sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$

40) $(156+12\sqrt{11}) : (6+14\sqrt{2}-2\sqrt{11}) = 7\sqrt{2}+\sqrt{11}-3$

41) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{10}) : (3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}) = \frac{7}{10}\sqrt{30}$
$+\frac{27}{10}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

42) $\sqrt{a} : (b+\sqrt{c}) = \frac{b\sqrt{a}-\sqrt{ac}}{b^2-c}$

43) $\sqrt{a} : (\sqrt{b}+\sqrt{c}) = \frac{\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}{b-c}$

44) $(c\sqrt{a}+d\sqrt{b}) : (f\sqrt{h}+g\sqrt{l}) =$
$\frac{cf\sqrt{ah}+df\sqrt{bh}-cg\sqrt{al}-dg\sqrt{bl}}{hf^2-lg^2}$

45) $[(f^2-hg^2-m)\sqrt{m}-2gm\sqrt{h}] : (f+g\sqrt{h}+\sqrt{m})$
$= f\sqrt{m}-g\sqrt{hm}-m$

46) $1 : \sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} = \sqrt[n]{\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}}$

47) $\sqrt[n]{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} : \sqrt[n]{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt[n]{\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}}$

48) $1 : (\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}) = \dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}{a-b}$ *)

49) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}) : (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}) =$

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}+2\sqrt[4]{a^3b}+2\sqrt[4]{ab^3}}{a-b}$$

50) $\sqrt{(ab+\sqrt{af})} : \sqrt{a} = \sqrt{\left(b+\sqrt{\frac{f}{a}}\right)}$

e) Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A\pm\sqrt{B}$.

Formel.

$$\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$$

Beispiele.

1) $\sqrt{(7+4\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$
2) $\sqrt{(43-15\sqrt{8})} = 5-3\sqrt{2}$
3) $\sqrt{(5-\sqrt{24})} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
4) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$
5) $\sqrt{(28+5\sqrt{12})} = 5+\sqrt{3}$
6) $\sqrt{(87-12\sqrt{42})} = 3\sqrt{7}-2\sqrt{6}$
7) $\sqrt{(\frac{3}{2}+\sqrt{2})} = 1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$
8) $\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$
9) $\sqrt{(\sqrt{27}+2\sqrt{6})} = \sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3}$ **)
10) $\sqrt{(\sqrt{32}-\sqrt{24})} = \sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$

---

*) Divisor und Dividend wird mit $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$ multiplicirt und alsdann wie gewöhnlich verfahren.

**) $A = \sqrt{27}$ gesetzt.

11) $\sqrt{(3\sqrt{5}+\sqrt{40})} = \sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{5}$

12) $\sqrt{(3\sqrt{6}+2\sqrt{12})} = \sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6}$

13) $\sqrt{(\sqrt{18}-4)} = \sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}$

14) $\sqrt{(a^2+b+2a\sqrt{b})} = a+\sqrt{b}$

15) $\sqrt{(ac^2+bd^2+2cd\sqrt{ab})} = c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$

16) $\sqrt{[2a+2\sqrt{(a^2-b^2)}]} = \sqrt{(a+b)}+\sqrt{(a-b)}$

17) $\sqrt{[x-2\sqrt{(x-1)}]} = \sqrt{(x-1)}-1$

18) $\sqrt{\left[\frac{a^2}{4}+\frac{c}{2}\sqrt{(a^2-c^2)}\right]} = \frac{c+\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$

19) $\sqrt{(x+xy-2x\sqrt{y})} = (\sqrt{y}-1)\sqrt{x}$

20) $\sqrt{[ap-2a\sqrt{(ap-a^2)}]} = \sqrt{(ap-a^2)}-a$

21) $\sqrt{\left[\frac{3a}{b}+\sqrt{\left(\frac{12a^3c^2}{bd^2}-\frac{4a^4c^4}{d^4}\right)}\right]}$

$$= \frac{ac}{d}+\sqrt{\left(\frac{3a}{b}-\frac{a^2c^2}{d^2}\right)}$$

22) $\sqrt{[b^2-ab+\frac{a^2}{4}+\sqrt{(4ab^3-8a^2b^2+a^3b)}]}$

$$= \sqrt{ab}+\sqrt{\left(b^2-2ab+\frac{a^2}{4}\right)}$$

V. Bezeichnung der Wurzelgrössen durch Bruch-Potenzen, und Rechnung damit.

Eine Potenz mit einem Bruch-Exponenten kann zwar als ein interpolirtes Glied einer Reihe von Potenzen mit ganzen Exponenten angesehen werden; jedoch scheint mir die gewöhnliche Ansicht, nach welcher ein Bruch-Exponent die Erhebung einer Wurzel zu einer Potenz bezeichnet, wohl die für Anfänger faßlichere zu seyn. Auch läßt sich alsdann die ganze Lehre, nebst der darauf gegründeten

von den Logarithmen, mit Euklidischer Strenge und bloß durch Zeichen erweisen. Ich unterwerfe übrigens diese Meinung der Prüfung der Kenner, ohne mein Urtheil als entscheidend anzusehn.

---

1) Bezeichnung.

1) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

2) $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = a^{-\frac{n}{m}}$

3) $\sqrt[m]{a^n b^p c^q} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{\frac{q}{m}} = (a^n b^p c^q)^{\frac{1}{m}}$

4) $\sqrt[m]{\frac{a^n b^p}{c^r d^s e^t}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{-\frac{r}{m}} d^{-\frac{s}{m}} e^{-\frac{t}{m}}$

5) $c\sqrt[4]{a^3} + \frac{d}{\sqrt[7]{a^2}} = ca^{\frac{3}{4}} + da^{-\frac{2}{7}}$

6) $\sqrt[5]{a^2bc} = a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}} = (a^2bc)^{\frac{1}{5}}$

7) $\sqrt[6]{\frac{a^5b^7}{c^{12}}} + \sqrt[8]{\frac{a^6b^4}{d^{20}}} = a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{7}{6}} c^{-2} + a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{5}{2}}$

8) $\frac{\sqrt{(c+d)}}{\sqrt[3]{c^5}} = (c+d)^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{5}{3}}$

9) $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{(a+x)}} = a^{-\frac{1}{2}}(a+x)^{-\frac{1}{3}}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

10) $\frac{\sqrt[3]{(a+b)^7 c^4}}{\sqrt[5]{f^2}\cdot\sqrt[6]{g^2}} = \frac{c^{\frac{4}{3}}(a+b)^{\frac{7}{3}}}{f^{\frac{2}{5}} g^{\frac{1}{3}}} = c^{\frac{4}{3}} f^{-\frac{2}{3}} g^{-\frac{1}{3}} (a+b)^{\frac{7}{3}}$

---

2) Rechnung mit Bruchpotenzen.

a) Multiplikation. *)

1) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

2) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$

3) $a^{-\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$

4) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{29}{12}} = a^2\sqrt[12]{a^5}$

5) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{21}{20}} = a\sqrt[20]{a}$

6) $a^{-\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{7}{8}} = a^{-\frac{13}{8}} = \frac{1}{a\sqrt[8]{a^5}}$

7) $a^{-\frac{3}{4}}b^{-2} \times a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}c = a^{\frac{1}{12}}b^{-\frac{3}{2}}c = \frac{c}{b}\sqrt[12]{\frac{a}{b^6}}$

8) $\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}} \times \frac{a^{\frac{7}{8}}b}{c^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{15}{8}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{4}} = a^2\sqrt[8]{\frac{b^4}{ac^2}}$

9) $\sqrt[5]{a^{12}} \times \sqrt[7]{a^3} \times \sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{12}{5}} \cdot a^{\frac{3}{7}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{367}{105}} = a^3\sqrt[105]{a^{52}}$

10) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} = a^{\frac{2}{15}} \cdot a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[120]{a^{61}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[120]{a}$

11) $\sqrt[5]{\frac{(c^2-y^2)^3}{(a+x)^8}} \times \sqrt[6]{\frac{(c^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a+x}} = (c^2-y^2)^{\frac{17}{20}}(a+x)^{-\frac{53}{30}}$

$= \frac{c^2-y^2}{(a+x)^2}\sqrt[60]{\frac{(a+x)^{14}}{(c^2-y^2)^9}}$

12) $\frac{b}{\sqrt{a}} \times \sqrt[3]{ac} \times \frac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}} = ba^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} \times c^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{13}{12}}$

$= c\sqrt[12]{\frac{b^6c}{a^2}}$

---

*) Die Addition und Subtraktion für Bruchpotenzen ist hier weggelassen worden, weil sie keine eigenthümliche Schwierigkeiten haben.

13) $(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{b^2})\times(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[5]{b^2})=(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{2}{5}})\times(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{2}{5}})$

$= a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{4}{5}} = a\sqrt{a}-\sqrt[5]{b^4}$

14) $\left(5\sqrt[4]{a^7}-\frac{6ab}{\sqrt[4]{a}}\right)\times\left(\sqrt[3]{a}-\frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right) = (5a^{\frac{7}{4}}-6a^{\frac{3}{4}}b)$

$\times(a^{\frac{1}{3}}-7a^{-\frac{2}{3}}b) = 5a^{\frac{25}{12}}-41a^{\frac{13}{12}}b+42a^{\frac{1}{12}}b^2$

$= (5a^2-41ab+42b^2)\sqrt[12]{a}$

15) $\left(\sqrt[5]{ab^3}+3\sqrt[5]{\frac{b^8}{a^4}}\right)\times\left(\sqrt{ab}+\frac{2}{b^2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=(a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{8}{5}}+3b^{\frac{8}{5}}a^{-\frac{4}{5}})$

$\times(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}) = a^{\frac{7}{10}}b^{\frac{11}{10}}+2a^{-\frac{3}{10}}b^{-\frac{9}{10}}$

$+3a^{-\frac{8}{10}}b^{\frac{21}{10}}+6a^{-\frac{18}{10}}b^{\frac{1}{10}} = \left(ab+\frac{2}{b}+3b^2+\frac{6}{a}\right)\sqrt[10]{\frac{b}{a^3}}$

16) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{a^3b^2}}-\frac{2\sqrt[3]{b^2c^3}}{a\sqrt{a}}\right)\times\left(\sqrt[5]{a^2}-\frac{b}{\sqrt[5]{a^3}}\right)=$

$(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}c)\times(a^{\frac{2}{5}}-a^{-\frac{8}{5}}b) =$

$a^{-\frac{1}{10}}b^{-\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{11}{10}}b^{\frac{2}{3}}c-a^{-\frac{11}{10}}b^{\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{21}{10}}b^{\frac{5}{3}}c =$

$\left(1-\frac{2bc}{a}-\frac{b}{a}+\frac{2b^2c}{a^2}\right)\sqrt[30]{\frac{1}{a^3b^{10}}}$

17) $\left(\frac{b}{c}\sqrt[5]{\frac{ad}{f}}-cd\sqrt[3]{\frac{ac}{bg}}\right)\times\left(\sqrt[5]{\frac{ab^5d}{c^5f}}+\sqrt[3]{\frac{ac^4d^3}{bg}}\right)=$

$\left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}b}{cf^{\frac{1}{5}}}-\frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right]\times\left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}b}{cf^{\frac{1}{5}}}+\frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right]=$

$\frac{(ad)^{\frac{2}{5}}b^2}{c^2f^{\frac{2}{5}}}-\frac{(ac)^{\frac{2}{3}}c^2d^2}{(bg)^{\frac{2}{3}}}=\frac{b^2}{c^2}\sqrt[5]{\frac{a^2d^2}{f^2}}-c^2d^2\sqrt[3]{\frac{a^2c^2}{b^2g^2}}$

b) Division.

1) $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$

2) $a^{\frac{m}{n}}:a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

3) $a^{-\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$

4) $a^{-\frac{m}{n}}:a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}} = a^{\frac{np-mq}{nq}} = a^{-\frac{mq-np}{nq}}$

5) $ca^{\frac{3}{4}}:da^{\frac{5}{6}} = \frac{ca^{-\frac{1}{12}}}{d} = \frac{c}{d\sqrt[12]{a}}$

6) $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{2}}:a^{-\frac{7}{5}}b^{-\frac{1}{4}}c = \frac{a^2b^{\frac{3}{4}}}{c} = \frac{a^2}{c}\sqrt[4]{b^3}$

7) $h:\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}}{cd^{\frac{1}{2}}} = \frac{ch\sqrt{d}}{\sqrt[12]{a^4b^3}}$

8) $\frac{a^{-\frac{9}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}d^8}:\frac{a^{-\frac{29}{4}}d^{\frac{11}{3}}}{b^{\frac{8}{5}}c} = \frac{a^{\frac{11}{4}}b^{\frac{34}{15}}c}{c^{\frac{1}{6}}d^{\frac{20}{3}}} = \frac{a^3b^2c}{d^7}\sqrt[60]{\frac{b^{16}d^{20}}{a^{15}c^{10}}} =$
$\frac{a^3b^2c}{d^7}\sqrt[12]{\frac{d^4}{a^3c^2}}\cdot\sqrt[15]{b^4}$

9) $(a^3-2\sqrt[4]{a^2b^3}-a^2\sqrt[6]{a^3b^2}+2b\sqrt[12]{b}):(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})$
$= \left(a^3-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{13}{12}}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}\right) =$
$a^{\frac{5}{2}}-2b^{\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{a}-2\sqrt[4]{b^3}$

10) $\left(\sqrt[12]{a^{10}b^9}-c\sqrt[10]{a^7}\cdot\sqrt[6]{b^5}-\frac{3}{2}a\sqrt[4]{b^3}+\frac{3abc}{2}\sqrt[30]{\frac{1}{a^4b^5}}\right)$
$:(\sqrt{ab}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{a^4b^3}) = a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{4}}-ca^{\frac{7}{10}}b^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}ab^{\frac{3}{4}}$
$+\frac{3}{2}ca^{\frac{13}{15}}b^{\frac{5}{6}}):\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}-ca^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}$
$= \sqrt[12]{a^4b^3}-c\sqrt[15]{a^3b^5}$

11) $(5a^2-41ab+42b^2)\sqrt[12]{a}:\left(\sqrt[3]{a}-\frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right) =$
$(5a^{\frac{25}{12}}-41a^{\frac{13}{12}}b+42a^{\frac{1}{12}}b^2):\left(a^{\frac{1}{3}}-7ba^{-\frac{2}{3}}\right) =$
$5a^{\frac{7}{4}}-6a^{\frac{3}{4}}b = (5a-6b)\sqrt[4]{a^3}$

12) $(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}) = (a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}):(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$
$= a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab}$

c) Potenzen von Potenzen.

1) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

2) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mp}}}$

3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mp}}}$

4) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

5) $(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{9}} = \sqrt[36]{a^9b^8}$

6) $(a^2b^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{5}})^{-\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{8}}c^{-\frac{1}{10}} = \sqrt[40]{\frac{b^5}{a^{20}c^4}}$

7) $\left[(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}\right]^{-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{\frac{1}{a}}$

8) $\sqrt[6]{(a^3b\sqrt[5]{a^3bc})^5} = (a^{\frac{18}{5}}b^{\frac{6}{5}}c^{\frac{1}{5}})^{\frac{5}{6}} = a^3bc^{\frac{1}{6}} = a^3b\sqrt[6]{c}$

9) $\left[\frac{c^2d}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}\right]^{-\frac{1}{3}} = \frac{c^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{3}}}{(a+b)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt[3]{c^2d}} = \sqrt[6]{\frac{(a+b)^3}{c^4d^2}}$

10) $\sqrt[4]{\left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}\right)^3} = (a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a^4b}$

11) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{(c-d)}\cdot\sqrt[3]{(a+x^2)^4}}{c^6d^{5m}}} = \left[\frac{(c-d)^{\frac{1}{2}}(a+x^2)^{\frac{4}{3}}}{c^6d^{5m}}\right]^{\frac{1}{4}} =$

$\frac{(c-d)^{\frac{1}{8}}(a+x^2)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{3}{2}}d^{\frac{5m}{4}}} = \frac{1}{cd^m}\sqrt[24]{\frac{(c-d)^3(a+x^2)^8}{c^{12}d^{6m}}}$

VI. Rechnung mit imaginären Grösen.

Eine gerade Wurzel aus einer negativen Größe ist unmöglich; sie heißt eine imaginäre Größe. — Man stößt bei der Rechnung bisweilen auf eine solche, wenn es entweder an sich unmöglich ist, die Forderung der Aufgabe zu erfüllen, oder, wenn die angenommene Form des Resultates unmöglich ist. In dem letzteren Falle sind es zwar bloße Formen; sie können aber nichts desto weniger bei fortgesetzter Rechnung auf keine unwahre Folgerungen führen, wenn sie durch richtige Schlüsse aus richtigen Principien hergeleitet worden. Sie sind bei der Rechnung von nicht geringem Nutzen, weil man dadurch oft fast von selbst auf die Entdeckung neuer Wahrheiten geleitet wird, welche sich auf andere Weisen zwar ebenfalls, jedoch nur durch Umwege finden lassen.

Es ist $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$. Man kann ferner streng erweisen, daß alle imaginäre Größen sich auf die Form $h + k\sqrt{-1}$ bringen lassen, wo h und k mögliche Größen sind; und unter dieser Form ist die Rechnung damit sehr leicht.

---

1) Addition und Subtraktion.

1) $a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1} = a + (b + c - d)\sqrt{-1}$

2) $3\sqrt{-4} - \sqrt{-25} + 4\sqrt{-9} = 13\sqrt{-1}$

3) $2\sqrt{-48} + 3\sqrt{-12} + 5\sqrt{-8} - 7\sqrt{-32} =$
$(14\sqrt{3} - 18\sqrt{2})\sqrt{-1}$

2) Multiplikation.

1) $a \times \sqrt{-a} = a\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$

2) $c\sqrt{-a} \times d\sqrt{-b} = c\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times d\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$
$= -cd\sqrt{ab}$

3) $(c\sqrt{-a} + d\sqrt{-b} + f) \times \sqrt{-a} = -ac - d\sqrt{ab}$
$+ f\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$

4) $(2 - \sqrt{-3}) \times (10 - \sqrt{-8}) = 20 - \sqrt{24}$
$-(10\sqrt{3} + 4\sqrt{2})\sqrt{-1}$

5) $(7 - \sqrt{-5}) \times (10 - 3\sqrt{-6}) = 70 - 3\sqrt{30}$
$-(10\sqrt{5} + 21\sqrt{6})\sqrt{-1}$

6) $(3 - \sqrt{-5}) \times (4 - 2\sqrt{-5}) = 2 - 10\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}$

7) $(2 - 5\sqrt{-3}) \times (7 - 4\sqrt{-3}) = -46 - 43\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$

8) $(9 + 6\sqrt{-1}) \times (3 + 7\sqrt{-1}) = -15 + 81\sqrt{-1}$

9) $(7 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}) \times (1 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}) = \tfrac{13}{2} - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$

10) $(1 - \sqrt{-1})^2 = -2\sqrt{-1}$

11) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{-5}) \times (\sqrt{7} - \sqrt{-3}) = \sqrt{14} - 3\sqrt{15}$
$-(3\sqrt{35} + \sqrt{6})\sqrt{-1}$

12) $(2\sqrt{3} - \sqrt{-5}) \times (4\sqrt{3} - 2\sqrt{-5}) = 14 - 8\sqrt{-15}$

13) $(2\sqrt{-3} - 5\sqrt{-4} - 7\sqrt{-2}) \times (\sqrt{-7} - 2\sqrt{-1})$
$= -2\sqrt{21} + 5\sqrt{28} + 7\sqrt{14} + 4\sqrt{3} - 20 - 14\sqrt{2}$

14) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})^2 = -(a + b + 2\sqrt{ab})$

15) $(a + \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) \times (a - \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) = a^2 + b$

16) $(a \pm \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})^2 = a^2 - b \pm 2a\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$

17) $(a \pm \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})^3 = a^3 - 3ab \pm (3a^2\sqrt{b} - b\sqrt{b})\sqrt{-1}$

18) $(a\sqrt{-1})^{4n} = a^{4n}$

19) $(a\sqrt{-1})^{4n+1} = a^{4n+1}\sqrt{-1}$

20) $(a\sqrt{-1})^{4n+2} = -a^{4n+2}$

21) $(a\sqrt{-1})^{4n+3} = -a^{4n+3}\sqrt{-1}$

3) Division.

1) $b\sqrt{-1} : c\sqrt{-1} = \frac{b}{c}$

2) $1 : \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

3) $a : b\sqrt{-1} = -\frac{a}{b}\sqrt{-1}$

4) $a : \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$

5) $(\sqrt{-12} + \sqrt{-6} + \sqrt{-9}) : \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

6) $(2\sqrt{8} - \sqrt{-10}) : -\sqrt{-2} = \sqrt{5} - 4\sqrt{-1}$

7) $(3\sqrt{-4} - 2\sqrt{-12} + \sqrt{6} - 9) : -3\sqrt{-2} = -\sqrt{2}$
$+ \frac{2}{3}\sqrt{6} + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{-1}$

8) $6 : (1 + \sqrt{-2}) = 2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$

9) $8 : (-1 + \sqrt{-3}) = -2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$

10) $1 : (3 - 2\sqrt{-3}) = \frac{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{21}$

11) $14 : (4\sqrt{-3} - 2\sqrt{-5}) = -(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{-1}$

12) $(5 - \sqrt{-2}) : (1 + \sqrt{-2}) = 1 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$

13) $(4\sqrt{5} - 20) \cdot (\frac{3}{2}\sqrt{-10} - 5\sqrt{-\frac{1}{2}}) = (\sqrt{10} + \sqrt{2})2\sqrt{-1}$

14) $[14 - \sqrt{15} - (7\sqrt{3} + 2\sqrt{5})\sqrt{-1}] : (7 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1})$
$= 2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$

15) $1 : [2 + (\sqrt{3} - \sqrt{5})\sqrt{-1}] =$
$\frac{12 + 2\sqrt{15} + (3\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{-1}}{42}$

4) Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A + B\sqrt{-1}$

Formel.

$$\sqrt{(A + B\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2 + B^2)} + A}{2}}$$
$$+ \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2 + B^2)} - A}{2}} \cdot \sqrt{-1}$$

Beispiele.

1) $\sqrt{(7+6\sqrt{-2})} = \sqrt{(7+6\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1})} = 3+\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}$

2) $\sqrt{(31+42\sqrt{-2})} = 7+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}$

3) $\sqrt{(16-24\sqrt{-5})} = 6-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}$

4) $\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = 1+2\sqrt{-1}$

5) $\sqrt{(4\sqrt{-6}-2)} = 2+\sqrt{6}\cdot\sqrt{-1}$

6) $\sqrt{(-83-60\sqrt{-3})} = 5-6\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$

7) $\sqrt{(2+4\sqrt{-42})} = \sqrt{14}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$

8) $\sqrt{(-2-2\sqrt{-15})} = \sqrt{3}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}$

9) $\sqrt{\left(\frac{a^2c}{b^2}-cd+\frac{ac\sqrt{4d}}{b}\sqrt{-1}\right)} = \frac{a}{b}\sqrt{c}+\sqrt{cd}\cdot\sqrt{-1}$

19) $\sqrt{\left(\frac{25a^2d}{c^2}-\frac{4a^2b}{d}-\frac{20a^2\sqrt{b}}{c}\sqrt{-1}\right)} = \frac{5a\sqrt{d}}{c} - 2a\sqrt{\frac{b}{d}}\cdot\sqrt{-1}$

11) $\sqrt{[a^4f^4-a^3b^3-a^2b^3-2a^3bf^2\sqrt{(a+b)}\cdot\sqrt{-1}]} = a^2f^2-ab\sqrt{(a+b)}\cdot\sqrt{-1}$

12) $\sqrt[4]{-1} = \sqrt{(0+\sqrt{-1})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

13) $\sqrt{(-\sqrt{-1})} = \sqrt{(0-\sqrt{-1})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

14) $\sqrt{(8\sqrt{-1})} = \sqrt{(0+8\sqrt{-1})} = 2+2\sqrt{-1}$

15) $\sqrt{\left(\frac{2c^2}{d^2}\cdot\sqrt{-1}\right)} = \frac{c}{d}(1+\sqrt{-1})$

16) $\sqrt{(2cd\sqrt{-1})} = (1+\sqrt{-1})\sqrt{cd}$

17) $\sqrt{(2+\sqrt{-3})} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

18) $\sqrt{(5-\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

VII. Reduktionen.

1) Reduktionen durch die Vereinigung der Brüche.

1) $\frac{a}{b}+c=\frac{a+bc}{b}$

2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

3) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$

4) $\frac{3a}{5b}+\frac{c}{4d}+h=\frac{12ad+5bc+20bdh}{20bd}$

5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}-\frac{g}{h}-k=$
$\frac{adfh+bcfh-bdeh-bdfg-bdfhk}{bdfh}$

6) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc-ac+ab}{abc}$

7) $\frac{3a}{4b}+\frac{5f}{8l}-\frac{x}{7y}=\frac{42aly+35bfy-8blx}{56bly}$

8) $\frac{af}{4bg}-\frac{5cd}{12bh}+\frac{2}{3}=\frac{3afh-5cdg+8bgh}{12bgh}$

9) $\frac{a}{4bcd}-\frac{h}{2bcg}+\frac{2cd}{5bg}=\frac{5ag-10dh+8c^2d^2}{20bcdg}$

10) $\frac{2a}{3bc}+\frac{5df}{8b^2c}-\frac{deg}{6b^2c^2}=\frac{16abc+15cdf-4deg}{24b^2c^2}$

11) $a-b-\frac{d}{ef}-\frac{c}{eg}=\frac{(a-b)efg-dg-cf}{efg}$

12) $e-f-\frac{g^3}{2ef}+\frac{f^m}{3eg}=\frac{6efg(e-f)-3g^4+2f^{m+1}}{6efg}$

13) $\frac{a^2d}{3b^7c^3}-\frac{3ad}{2b^4c^2}-\frac{b^2}{cd}=\frac{2a^2d^2-9ab^3cd^2-6b^9c^2}{6b^7c^3d}$

14) $\frac{a}{b^n}+\frac{c}{b^{n-r}}+\frac{d}{b^{n-2r}}=\frac{a+cb^r+db^{2r}}{b^n}$

15) $\frac{a}{x^n}-\frac{c}{x^{n-1}}+\frac{d}{x^{n-r-s}}=\frac{a-cx+dx^{r+s}}{x^n}$

16) $c+2ab-3ac-\frac{b^2c-5ab^2c+a^3}{b^2-bc}=$
$\frac{2ab^3-bc^2+3abc^2-a^3}{b^2-bc}$

17) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$

18) $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$

19) $\frac{13a-5b}{4}-\frac{7a-2b}{6}-\frac{3a}{5}=\frac{89a-55b}{60}$

20) $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}=\frac{85a-20b}{84}$

21) $\frac{3a+2b}{c}-\frac{5bd-2a-3d}{4cd}=\frac{12ad+3bd+2a+3d}{4cd}$

22) $\frac{a}{b}+\frac{a-3b}{cd}+\frac{a^2-b^2-ab}{bcd}=\frac{acd-4b^2+a^2}{bcd}$

23) $cf+\frac{a^2}{c^5f}-\frac{a-b-c^2}{bc^5f^3}=\frac{bc^6f^4+a^2bf^2-a+b+c^2}{bc^5f^3}$

24) $\frac{3a+b+x}{5a}-\frac{2a+b}{3b}+\frac{7a-2b}{9a}=\frac{47ab-b^2+9bx-30a^2}{45ab}$

25) $\frac{3a^m(a+b)^{m-2}}{c^{m+2}d^{m-3}f^4}-\frac{a^{3m}-2acd^{4-m}}{c^{m+1}df^n(a+b)^2}-\frac{1}{c^{m-2}f^{n-3}(a+b)^2}$
$=\frac{3a^mf^{n-4}(a+b)^m-ca^{3m}d^{m-4}+2ac^2-c^4f^3d^{m-3}}{c^{m+2}d^{m-3}f^n(a+b)^2}$

26) $\frac{(a+x)^{\frac{p}{q}-1}}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}}-\frac{b^{\frac{2}{3}}x^2(c+x)^{-\frac{m}{n}}}{(a+x)^{1-\frac{p}{2q}}}=\frac{(a+x)^{\frac{p}{2q}}-3b^{\frac{8}{3}}x^2}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}(a+x)^{1-\frac{p}{2q}}}$

27) $\frac{a}{a+z}+\frac{z}{a-z}=\frac{a^2+z^2}{a^2-z^2}$

28) $\frac{f+g}{3f-2g}-\frac{5f-2g}{2f-9g}=\frac{9fg-13f^2-13g^2}{6f^2-31fg+18g^2}$

$$29)\ \frac{a}{b+x}-\frac{c}{x}+\frac{3c}{4x}+2b=\frac{8bx^2+(8b^2+4a-c)x-bc}{4bx+4x^2}$$

$$30)\ \frac{3a+2x}{a+x}-\frac{5a-x}{a-x}+\frac{a}{2x}=\frac{a^3-4a^2x-11ax^2-2x^3}{2x(a^2-x^2)}$$

$$31)\ \frac{az}{a^2-z^2}-\frac{a-z}{x+z}=\frac{3az-a^2-z^2}{a^2-z^2}$$

$$32)\ \frac{ac}{a^2-4y^2}+\frac{bd}{ac+2cy}=\frac{ac^2+abd-2bdy}{c(a^2-4y^2)}$$

$$33)\ \frac{a^3}{(a+b)^3}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{b}{a+b}=\frac{a^3+ab^2+b^3}{(a+b)^3}$$

$$34)\ \frac{a^m}{(a+b)^n}+\frac{a^{m-2}b^r}{(a+b)^{n-1}}-\frac{a^{m-3}b^r}{(a+b)^{n-2}}$$

$$=\frac{a^m-a^{m-2}b^{r+1}-a^{m-3}b^{r+2}}{(a+b)^n}$$

$$35)\ \frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}-\frac{x}{a-x}=\frac{2x^4+13a^2x^2-2a^3x-a^4}{(a^2-x^2)^2}$$

$$36)\ \frac{a-(n+1)a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^2(1-a^n)}{(1-a)^2}=\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$$

$$37)\ \frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{m+1+(m-1)z^2}=\frac{m(1+z^2)}{m(1-z^4)+(1-z^2)^2}$$

$$38)\ \frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}=$$

$$\frac{1+x+x^2}{1-x-x^4+x^5}$$

$$39)\ \frac{1+2x}{(3-x)(1+x)}+\frac{7}{(2+x)(1-3x)}+\frac{x}{(1+x)(2+x)}=$$

$$\frac{23+16x-30x^2-3x^3}{(3-x)(1+x)(2+x)(1-3x)}$$

$$40)\ \frac{3h}{(h-2x)^2}+\frac{2h+x}{(h+x)(h-2x)}-\frac{5}{h+x}=$$

$$\frac{20hx-22x^2}{(h+x)(h-2x)^2}$$

2) Reduktionen durch das Aufheben der Brüche. *)

1) $\frac{ax+x^2}{3bx-cx}=\frac{a+x}{3b-c}$

2) $\frac{ac^3-bc^5-c^7}{3bc^2+c^4}=\frac{ac-bc^3-c^5}{3b+c^2}$

3) $\frac{21a^3b^2c-9ab^3c^2}{15a^2b^2c+3a^5b^4c^2-12ab^2c}=\frac{7a^2-3bc}{5a+a^4b^2c-4}$

4) $$\frac{2a^{n+r}b^{m-1}c-4a^rb^{2m-1}c^2d+2a^{r+1}b^mc+6a^{r-1}b^{m-1}c^n}{8a^{r+5}b^{m+2}c^2-2a^{r+3}b^mc+10a^rb^3c^4}$$
$$=\frac{a^n-2b^mcd+ab+3a^{-1}c^{n-1}}{4a^5b^3c-a^3b+5b^{4-m}c^3}$$

5) $\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc}=\frac{7a}{5c}$

6) $\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}=\frac{2a^2x^3}{3b^2}$

7) $\frac{6ac+9bc-5c^2}{12adf+18bdf-10cdf}=\frac{c}{2df}$

---

*) Das Aufheben der Brüche setzt voraus, daß man den gemeinschaftlichen Theiler des Zählers und Nenners eines Bruches zu finden im Stande sey. Wie der gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen zu finden ist, wird fast in allen Rechenbüchern gelehrt, und kann daher als bekannt vorausgesetzt werden. Ein ähnliches Verfahren läßt sich auch bei den Buchstaben-Ausdrücken anbringen, führt aber oft zu weitläufigen Rechnungen. Auch die Auflösung der Gleichungen giebt die Faktoren, und kann bisweilen mit Nutzen angewendet werden. Die Uebung, und einige Aufmerksamkeit auf die Natur der Ausdrücke, führen jedoch meistentheils weit leichter zum Zwecke.

8) $\frac{45a^3b^4c+27a^8b^7cd-9a^4b^3d^3}{30a^2b^2c^3d^4+18a^7b^6c^3d^6-6a^8c^2d^7}=\frac{3ab^2}{2c^2d^4}$

9) $\frac{30a^{3n-1}b^rc^{r+2}-6a^{2n-4}b^8c^rd^{r-1}}{20a^nb^{r-1}c^2d^2-4a^{-8}b^2d^{r+1}}=\frac{3a^{2n-1}bc^r}{2d^2}$

10) $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}=\frac{5a}{a-x}$

11) $\frac{a^3-x^3}{(a-x)^2}=\frac{a^2+ax+x^2}{a-x}$

12) $\frac{n^2-2n+1}{n^2-1}=\frac{n-1}{n+1}$

13) $\frac{a^3+(1+a)ay+y^2}{a^4-y^2}=\frac{a+y}{a^2-y}$

14) $\frac{ac+bd+ad+bc}{af+2bx+2ax+bf}=\frac{c+d}{f+2x}$

15) $\frac{6ac+10bc+9ad+15bd}{6c^2+9cd-2c-3d}=\frac{3a+5b}{3c-1}$

16) $\frac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}=\frac{n^2}{n-2}$

17) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{x-1}{x+2}$

18) $\frac{9x^3+53x^2-9x-18}{x^2+11x+30}=\frac{9x^2-x-3}{x+5}$

19) $\frac{2x^3+x^2-8x+5}{7x^2-12x+5}=\frac{2x^2+3x-5}{7x-5}$

20) $\frac{2x^3+3x^2+x}{x^3-x^2-2x}=\frac{2x+1}{x-2}$

21) $\frac{a^3b^3+c^3x^3}{a^2b^2-c^2x^2}=\frac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}$

22) $\frac{ax^m-bx^{m+1}}{a^2bx-b^3x^3}=\frac{x^{m-1}}{ab+b^2x}$

23) $\frac{2x^3-(3c+d+2)x^2+(3c+d)x}{x^4-x}=\frac{2x-3c-d}{x^2+x+1}$

24) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}=\dfrac{a+b+c}{a-b-c}$

25) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}=\dfrac{a-2b}{a+b-c}$

26) $\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=$

$\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}=\dfrac{a+b}{(c+a-b)(b-a+c)}$ *)

3) Vermischte Reduktionen.

1) $\sqrt{ax}+\dfrac{ax}{a-\sqrt{ax}}=\dfrac{a\sqrt{ax}}{a-\sqrt{ax}}=\dfrac{a\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

2) $\dfrac{c\sqrt{x}}{\sqrt{(a+x)}}+\dfrac{d\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}+\dfrac{a\sqrt{(ax^3+x^4)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}-\sqrt{(a^2-x^2)}$
$=\dfrac{c\sqrt{(ax-x^2)}+(ax+d)\sqrt{(ax+x^2)}+x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$

3) $\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3x^2-1}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$

4) $\dfrac{ax^3}{(a+x)^{\frac{8}{3}}}+\dfrac{bx^2}{(a+x)^{\frac{5}{3}}}+\dfrac{cx}{(a+x)^{\frac{2}{3}}}=$
$\dfrac{(a+b+c)x^3+(ab+2ac)x^2+a^2cx}{(a+x)^2\sqrt[3]{(a+x)^2}}$

5) $\sqrt{\left(1-\dfrac{f^2}{(f-g)^2}\right)}=\dfrac{\sqrt{(g^2-2fg)}}{f-g}$

6) $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}=\dfrac{a^2-b+2a\sqrt{-b}}{a^2+b}$

---

*) Bei dieser Reduktion hat der Lehrer Gelegenheit, verschiedene Bemerkungen zu machen.

7) $\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}=\frac{2(a^2-b)}{a^2+b}$

8) $\frac{\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}}=\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$

9) $\frac{b}{\sqrt[n]{[a-\sqrt{(a^2-b^n)}]}}=\sqrt[n]{[a+\sqrt{(a^2-b^n)}]}$

10) $\sqrt{(a+\sqrt{b})}\pm\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{[2a\pm2\sqrt{(a^2-b)}]}$ *)

11) $\sqrt{(a+\sqrt{-b})}\pm\sqrt{(a-\sqrt{-b})}=\sqrt{[2a\pm2\sqrt{(a^2+b)}]}$

12) $\sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}+\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}-\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)}$
$=\sqrt{\frac{4af}{c}}$

13) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}=\frac{(ad+bc)fh}{(eh+fg)bd}$

14) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}}{\frac{g}{h}+\frac{i}{k}+\frac{l}{m}}=\frac{(adf+bcf+bde)hkm}{(gkm+him+hkl)bdf}$

15) $\frac{\frac{a^3f^3}{b^2c^2}-\frac{a^4f}{bc}+a^2c}{\frac{a^2g}{bc^2d}-\frac{a^6c}{b^2g^2h}+\frac{a^3}{bc}}=\frac{(af^3-a^2bcf+b^2c^3)dg^2h}{bg^3h-a^4c^3d+abcdg^2h}$

---

*) Die hier geforderte Reduktion kann auf zwei Arten geschehen, nämlich: 1) dadurch, daß man sowohl aus $a+\sqrt{b}$ als aus $a-\sqrt{b}$ die Wurzel ziehet, und beide Wurzeln addirt, oder: 2) dadurch, daß man den ganzen Ausdruck quadrirt, und dem erhaltenen Quadrate das Wurzelzeichen vorsetzt. Dies gilt auch von den zwei folgenden Reduktionen.

16) $$\frac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2+b^2}$$

17) $$\frac{\frac{c^2}{d^2}-\frac{c^3}{a+b}}{\frac{c^2}{a+b}-\frac{c^4}{dh^2}}=\frac{(a+b-cd^2)h^2}{d^2h^2-(a+b)c^2d}$$

18) $$\frac{1+\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{\sqrt{(a^2+x^2)}+\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

19) $$\frac{\sqrt{(1-x)}+\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}}{1+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}=\sqrt{(1-x)}$$

20) $$\frac{a^2+ax+x^2}{a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4}=\frac{a^3-x^3}{a^5-x^5}$$

21) $$\frac{a^3-a^2x+ax^2-x^3}{a^5-a^4x+a^3x^2-a^2x^3+ax^4-x^5}=\frac{a^4-x^4}{a^6-x^6}$$

22) $$\frac{a^2-2ax+4x^2}{a^3-2a^2x+4ax^2-8x^3}=\frac{a^3+8x^3}{a^4-16x^4}$$

23) $9\sqrt{(6\sqrt{28})}+3\sqrt{(12\sqrt{7})}-8\sqrt{(4\sqrt{63})}=8\sqrt[4]{63}$

24) $3\sqrt{(40\sqrt{12})}+2\sqrt{(5\sqrt{48})}-4\sqrt{(15\sqrt{27})}=4\sqrt[4]{75}$

25) $4\sqrt[3]{(6\sqrt{32})}+\sqrt[3]{(9\sqrt{162})}+2\sqrt[3]{(75\sqrt{50})}=21\sqrt[6]{18}$

26) $5\sqrt[3]{(4\sqrt[3]{192})}+7\sqrt[3]{(18\sqrt[3]{81})}=31\sqrt[9]{24}$

27) $3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})}=4\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}$

28) $3\sqrt[3]{54-36\sqrt{27})}-\sqrt[3]{(16-16\sqrt{12})}=7\sqrt[3]{(2-4\sqrt{3})}$

29) $(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2=(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$ *)

30) $(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2+a'^2c^2+b'^2c^2=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2)$

31) $(aa'+bb'+cc')^2+(ab'-ba')^2+(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$

32) $(aa'+bb'+cc'+dd')^2+(ab'-ba'+cd'-dc')^2+(ac'-bd'-ca'+db')^2+(ad'+bc'-cb'-da')^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)$

33) $(a^2+Ab^2)(a'^2+Ab'^2)=(aa'\pm Abb')^2+A(ab'\mp ba')^2$ **)

34) $(ab'-ba')(ab''-ba'')+(bc'-cb')(bc''-cb'')+(ca'-ac')(ca''-ac'')=(a^2+b^2+c^2)(a'a''+b'b''+c'c'')-(aa'+bb'+cc')(aa''+bb''+cc'')$

---

*) Man bezeichnet bisweilen, der Symmetrie wegen, die Größen durch Buchstaben mit angehängten Strichen; es werden aber alsdann unter a, b, c, ꝛc., a', b', c', ꝛc., a'', b'', c'', ꝛc., a''', b''', c''', ꝛc. ꝛc., lauter von einander verschiedene Größen gedacht, obschon sie auch einander gleich seyn können.

**) Die Formeln 29, 30, 31, 32, 33, lösen einige Aufgaben der unbestimmten Analysis auf, welche weiterhin vorkommen werden. Man überzeugt sich von ihrer Richtigkeit durch die wirkliche Entwickelung der Quadrate und Produkte. Es lassen sich auch bei dieser Entwickelung einige kleine Vortheile anbringen, welche der Aufmerksame von selbst finden wird.

VIII. Logarithmen.

Was heißt der Logarithme einer Zahl? Was seine Grundzahl (Basis)? — Wie hat man es zu verstehen, wenn z. B. gesagt wird, es sey für die Basis *a* der Logarithme einer Zahl $N=6,67$? — Was heißt ein Logarithmensystem? Und welches insbesondere das von Henry Briggs benannte Briggsche System? — Wie lassen sich die weiter unten folgenden drei Hauptformeln durch Worte darstellen? Und wie lassen sie sich erweisen? — Könnte man wohl 1 zur Basis eines Systems annehmen? — Was ist der Logarithme von 1? — Wenn die Basis > 1, so ist der Logarithme einer Zahl, welche größer als 1 ist, positiv, hingegen der Logarithme einer Zahl, welche kleiner als 1 ist, negativ. Wie verhält es sich aber, wenn die Basis < 1 ist? — Nur wenige Logarithmen sind ganze Zahlen, die übrigen enthalten eine ganze Zahl und noch einen Bruch, und zwar bei dem Briggschen System immer einen unvollständigen Bruch, d. h. einen solchen, welcher sich nicht genau angeben läßt. — Wie heißt die ganze Zahl, und wie der Bruch? — Was ist in dem Briggschen System die Charakteristik einer Zahl, welche zwischen 10^n und 10^{n+1} fällt? Und was die Charakteristik eines Bruches, welcher zwischen $\frac{1}{10^n}$ und $\frac{1}{10^{n+1}}$ fällt?

Wenn die Differenzen der Zahlen im Verhältniß mit diesen Zahlen selbst nur klein sind, so verhalten sich die Differenzen der Logarithmen beinahe wie die Differenzen der Zahlen selbst. Der Grund hiervon kann erst in der Analysis gegeben werden. Wozu dienen nun die in den größeren Logarithmentafeln angegebenen Proportionaltheile?

1) Hauptformeln.

1) $\log AB = \log A + \log B$

2) $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$

3) $\log A^n = n \log A$

Anmerkung. In 3) kann n eine positive, negative, ganze oder gebrochene Zahl seyn.

---

2) Anwendung derselben auf die Bestimmung der Logarithmen von Produkten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln.

a) Für allgemeine oder Buchstaben-Ausdrücke.

1) $\log abcd = \log a + \log b + \log c + \log d$

2) $\log \frac{fg}{cd} = \log f + \log g - \log c - \log d$

3) $\log a^m b^n c^p = m \log a + n \log b + p \log c$

4) $\log \frac{a^m b^{-n}}{c^p d^q} = m \log a - n \log b - p \log c - q \log d$

5) $\log a^{\frac{m}{n}} b^{-\frac{p}{q}} c = \frac{m}{n} \log a - \frac{p}{q} \log b + \log c$

6) $\log \sqrt[n]{a^m b^{-n} c^{\frac{p}{q}}} = \frac{m}{n} \log a - \log b + \frac{p}{nq} \log c$

7) $\log \frac{a \sqrt[n]{c^m}}{b \sqrt{d}} = \log a + \frac{m}{n} \log c - \log b - \frac{1}{2} \log d$

8) $\log \frac{(a+b)^n c^m}{(c+d)\sqrt[4]{d^3}} = n\log(a+b) + m\log c - \log(c+d)$
$- \frac{3}{4}\log d$

9) $\log \frac{1}{(a+b^n)^m} = -m \log(a+b^n)$

10) $\log \frac{1}{\sqrt[n]{(a+b)}} = -\frac{1}{n}\log(a+b)$

11) $\log \sqrt[m]{(a^2-x^2)} = \frac{1}{m}\log(a^2-x^2) = \frac{1}{m}\log(a+x)$
$+ \frac{1}{m}\log(a-x)$

12) $x \log a = \log a^x$

13) $n \log a + m \log b - p \log c = \log \frac{a^n b^m}{c^p}$

14) $n\log(a+y) + \log c - m\log(a-y) = \log \frac{c(a+y)^n}{(a-y)^m}$

15) $\frac{1}{n}\log(2a+3b) - \frac{2}{3}\log c = \log \frac{\sqrt[n]{(2a+3b)}}{\sqrt[3]{c^2}}$

b) Für Zahlenausdrücke nach dem Briggschen System.

1) $\log(93 \times 3514) = 5{,}5142847$
2) $\log(1225 \times 387) = 5{,}6758471$
3) $\log(628 \times 493) = 5{,}4908066$
4) $\log(3748 \times 1752 \times 4065) = 10{,}4263942$
5) $\log \frac{5}{4} = 0{,}0969100$
6) $\log \frac{89}{7} = 0{,}7459666$
7) $\log \frac{14}{3} = 0{,}6690068$
8) $\log 15\frac{3}{4} = 1{,}1972806$
9) $\log 7\frac{4}{13} = 0{,}8637803$

53) $\log \sqrt[8]{15276} = 0{,}5230012$

54) $\log \sqrt[5]{35107} = 0{,}9090787$

55) $\log \sqrt[100]{13} = 0{,}0111394$

56) $\log \sqrt[7]{\frac{15}{4}} = 0{,}0820045$

57) $\log \sqrt[5]{\frac{4}{9}} = 0{,}9295635 - 1$

58) $\log \sqrt[16]{\frac{3587}{20593}} = 0{,}9525632 - 1$

59) $\log \sqrt[35]{\frac{803}{91056}} = 0{,}9412973 - 1$

60) $\log \sqrt[17]{(954)^{12}} = 2{,}1032106$

61) $\log \sqrt[11]{(\frac{12}{7})^{28}} = 0{,}5958482$

62) $\log \sqrt[18]{(\frac{547}{935})^{207}} = 0{,}2927210 - 4$

63) $\log \sqrt[14]{(\frac{1}{3})^{187}} = 0{,}6270232 - 7$

64) $\log \sqrt[16]{(\frac{14}{267})^{715}} = 0{,}7828746 - 58$

65) $\log \sqrt[80]{0{,}00534} = 0{,}9715943 - 1$

66) $\log \sqrt[540]{0{,}00007} = 0{,}9923057 - 1$

67) $\log \sqrt[12]{(0{,}34576)^{7}} = 0{,}7309519 - 1$

68) $\log \sqrt[32]{(356{,}27)^{11}} = 0{,}8771741$

69) $\log \sqrt[5]{\frac{0{,}365 \times \sqrt{2}}{788}} = 0{,}3632563 - 1$

70) $\log \sqrt[10]{\frac{78563\sqrt[3]{\frac{5}{3}}}{15\sqrt[4]{0{,}2}}} = 0{,}3967819$

71) $\log \sqrt[9]{\frac{347\sqrt[7]{0{,}0073}}{126\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}} = 0{,}0280126$

---

3) Gebrauch der Proportionaltheile bei den Logarithmen.

a) Bestimmung der Logarithmen solcher Zahlen, welche die Grenzen der Tafeln überschreiten.

1) log 1851273 = 6,2674705
2) log 14459809 = 7,1601626
3) log 10134761 = 7,0058135
4) log 7095137 = 6,8509608
5) log 506860900 = 8,7048888
6) log 3,614699 = 0,5580721
7) log 84,827567 = 1,9285370
8) log 211447,39 = 5,3252023
9) log 0,0013514133 = 0,1307882 — 3
10) log 0,0003599547 = 0,5562478 — 4
11) log $75907\frac{1}{8}$ = 4,8802825
12) log $32116\frac{7}{9}$ = 4,5067320
13) log $2528811\frac{1}{4}$ = 6,4029164
14) log $522076\frac{2}{13}$ = 5,7177339

b) Bestimmung der Zahlen, die zu solchen Logarithmen gehören, welche sich nicht genau in den Tafeln finden.

1) num. log 1,0742664 = 11,86496····
2) num. log 3,5947835 = 3933,538····
3) num. log 0,7813427 = 6,044254····
4) num. log $\bar{2}$,0037683 = 100,8714····
5) num. log 4,0005673 = 10013,07····

6) num. log 5,6165834 = 413602,7....

7) num. log 3,7694480 = 5880,956....

8) num. log 0,2307611 = 1,701222....

9) num. log 4,2923065 = 19602,27....

10) num. log 6,1785400 = 1508481,....

---

4) Wirkliche Berechnung einiger Zahlen-Ausdrücke mit Hülfe der Logarithmen.

1) $\sqrt[7]{8} = 1,345900....$

2) $\sqrt[4]{35246} = 13,70179....$

3) $\sqrt[12]{567348} = 3,016389....$

4) $\sqrt[6]{235,78} = 2,485522....$

5) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}} = 0,959322....$

6) $\sqrt[7]{\frac{1171}{345}} = 1,190747....$

7) $\sqrt[3]{17705\frac{2}{9}} = 26,06356....$

8) $\sqrt[9]{1350\frac{7}{8}} = 2,227645....$

9) $\sqrt[8]{172\frac{5}{6}} = 1,904159....$

10) $\sqrt[13]{\frac{3348}{569}} = 1,146055....$

11) $(\frac{9}{8})^{21} = 11,86322....$

12) $(2\frac{5}{6})^{9} = 11767,35....$

13) $(\frac{643}{637})^{123} = 3,168104....$

14) $(317\frac{3}{4})^{0,6} = 31,71402....$

15) $(\frac{167}{53})^{0,32} = 1,443779....$

16) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,0587} = 0,982093\ldots.$

17) $\frac{(991,767)^5 \times 12,34}{(20,358 \times 10,1575)^6} = 151,4369\ldots.$

18) $\frac{(52072)^{13} \times \sqrt{(0,000734)^9}}{(255608)^8} = 8930,834\ldots.$

19) $\left(\frac{42666}{1147}\right)^{12} \times \left(\frac{765}{19432}\right)^{10} = 62756,88\ldots.$

20) $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}\right)} = 1,295695\ldots.$

21) $\sqrt[3]{\left(0,26 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = 0,596544\ldots.$

22) $\sqrt[5]{\frac{3425\sqrt[7]{136}}{0,00034}} = 28,94639\ldots.$

23) $253\sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt{2}}} = 2016,914\ldots.$

24) $\sqrt[4]{\frac{132 \times (7,356)^9}{\sqrt{(3,25)^5}}} = 144,5972\ldots.$

25) $\frac{\sqrt[7]{(466871)^6} \times \sqrt[9]{(3576)^{16}}}{996003\sqrt{0,0071}} = 1788845,\ldots.$

26) $\sqrt[8]{(21 + \sqrt[6]{19})} = 1,476875\ldots.$

27) $\sqrt[8]{(5,03 + \sqrt[5]{0,2})} = 1,792020\ldots.$

28) $\sqrt[5]{(9,921 - 3\sqrt{5,02})} = 1,261866\ldots.$

29) $\sqrt[16]{\frac{43 + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}} = 1,264848\ldots.$

. . . .

Folgende leicht zu erweisende Sätze verdienen noch bemerkt zu werden.

1) Es mögen A, B, zwei Logarithmen-Systeme bezeichnen, welchen die Basen a, b, zugehören; es mögen

3) Perm. $(abcd) =$

abcd	*cabd*
abdc	*cadb*
acbd	*cbad*
acdb	*cbda*
adbc	*cdab*
adcb	*cdba*
bacd	*dabc*
badc	*dacb*
bcad	*dbac*
bcda	*dbca*
bdac	*dcab*
bdca	*dcba*

4) Perm. $(abbc) =$

abbc
abcb
acbb
babc
bacb
bbac
bbca
bcab
bcba
cabb
cbab
cbba

5) Perm. $(aabbc) =$

aabbc	*babca*
aabcb	*bacab*
aacbb	*bacba*
ababc	*bbaac*
abacb	*bbaca*
abbac	*bbcaa*
abbca	*bcaab*
abcab	*bcaba*
abcba	*bcbaa*
acabb	*caabb*
acbab	*cabab*
acbba	*cabba*
baabc	*cbaab*
baacb	*cbaba*
babac	*cbbaa*

6) Perm. $(aaaabb) =$

aaaabb
aaabab
aaabba
aabaab
aababa
aabbaa
abaaab
abaaba
ababaa
abbaaa
baaaab
baaaba
baabaa
babaaa
bbaaaa

7) Perm. $(aabcd) =$

aabcd	*acabd*	*baacd*	*caabd*	*daabc*
aabdc	*acadb*	*baadc*	*caadb*	*daacb*
aacbd	*acbad*	*bacad*	*cabad*	*dabac*
aacdb	*acbda*	*bacda*	*cabda*	*dabca*
aadbc	*acdab*	*badac*	*cadab*	*dacab*
aadcb	*acdba*	*badca*	*cadba*	*dacba*
abacd	*adabc*	*bcaad*	*cbaad*	*dbaac*
abadc	*adacb*	*bcada*	*cbada*	*dbaca*
abcad	*adbac*	*bcdaa*	*cbdaa*	*dbcaa*
abcda	*adbca*	*bdaac*	*cdaab*	*dcaab*
abdac	*adcab*	*bdaca*	*cdaba*	*dcaba*
abdca	*adcba*	*bdcaa*	*cdbaa*	*dcbaa*

8) Perm. $(aabbcc) =$

aabbcc	*acabbc*	*bacabc*	*bcbaac*	*cbaabc*
aabcbc	*acabcb*	*bacacb*	*bcbaca*	*cbaacb*
aabccb	*acacbb*	*bacbac*	*bcbcaa*	*cbabac*
aacbbc	*acbabc*	*bacbca*	*bccaab*	*cbabca*
aacbcb	*acbacb*	*baccab*	*bccaba*	*cbacab*
aaccbb	*acbbac*	*baccba*	*bccbaa*	*cbacba*
ababcc	*acbbca*	*bbaacc*	*caabbc*	*cbbaac*
abacbc	*acbcab*	*bbacac*	*caabcb*	*cbbaca*
abaccb	*acbcba*	*bbacca*	*caacbb*	*cbbcaa*
abbacc	*accabb*	*bbcaac*	*cababc*	*cbcaab*
abbcac	*accbab*	*bbcaca*	*cabacb*	*cbcaba*
abbcca	*accbba*	*bbccaa*	*cabbac*	*cbcbaa*
abcabc	*baabcc*	*bcaabc*	*cabbca*	*ccaabb*
abcacb	*baacbc*	*bcaacb*	*cabcab*	*ccabab*
abcbac	*baaccb*	*bcabac*	*cabcba*	*ccabba*
abcbca	*babacc*	*bcabca*	*cacabb*	*ccbaab*
abccab	*babcac*	*bcacab*	*cacbab*	*ccbaba*
abccba	*babcca*	*bcacba*	*cacbba*	*ccbbaa*

b) Anzahl der Versetzungen. *)

Formeln.

I. Die Anzahl der Versetzungen von N verschiedenen Elementen ist $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots\cdots (N-1)N$

II. Befinden sich unter den gegebenen Elementen mehrere gleiche, so ist, wenn $l+m+n+p+$ rc. $= N$, die Zahl der Versetzungen der Complexion $a^l b^m c^n d^p \cdots$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots\cdots\cdots (N-1)N}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots l \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \times \cdots}$$

$$= \frac{(l+1)(l+2)(l+3) \cdots\cdots (N-1)N}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \times \cdots}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3) \cdots\cdots (N-1)N}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots l \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \times \cdots}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots\cdots (N-1)N}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots l \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \times \cdots}$$

u. s. w.

wo der Produkte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots l$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p$, rc., so viele sind, als es verschiedene Buchstaben in der Complexion giebt.

Beispiele.

1) n. P. $(a) = 1$
2) n. P. $(ab) = 2$
3) n. P. $(abc) = 6$
4) n. P. $(abcd) = 24$

---

*) Die hier vorkommenden Exponenten müssen als bloße Wiederholungs-Exponenten angesehen werden, welche anzeigen, wie oft die Buchstaben, bei denen sie sich befinden, wiederholt werden sollen. n. P. heißt numerus Permutationum (Versetzungszahl).

7) Perm. $(aabcd) =$

$aabcd$	$acabd$	$baacd$	$caabd$	$daabc$
$aabdc$	$acadb$	$baadc$	$caadb$	$daacb$
$aacbd$	$acbad$	$bacad$	$cabad$	$dabac$
$aacdb$	$acbda$	$bacda$	$cabda$	$dabca$
$aadbc$	$acdab$	$badac$	$cadab$	$dacab$
$aadcb$	$acdba$	$badca$	$cadba$	$dacba$
$abacd$	$adabc$	$bcaad$	$cbaad$	$dbaac$
$abadc$	$adacb$	$bcada$	$cbada$	$dbaca$
$abcad$	$adbac$	$bcdaa$	$cbdaa$	$dbcaa$
$abcda$	$adbca$	$bdaac$	$cdaab$	$dcaab$
$abdac$	$adcab$	$bdaca$	$cdaba$	$dcaba$
$abdca$	$adcba$	$bdcaa$	$cdbaa$	$dcbaa$

8) Perm. $(aabbcc) =$

$aabbcc$	$acabbc$	$bacabc$	$bcbaac$	$cbaabc$
$aabcbc$	$acabcb$	$bacacb$	$bcbaca$	$cbaacb$
$aabccb$	$acacbb$	$bacbac$	$bcbcaa$	$cbabac$
$aacbbc$	$acbabc$	$bacbca$	$bccaab$	$cbabca$
$aacbcb$	$acbacb$	$baccab$	$bccaba$	$cbacab$
$aaccbb$	$acbbac$	$baccba$	$bccbaa$	$cbacba$
$ababcc$	$acbbca$	$bbaacc$	$caabbc$	$cbbaac$
$abacbc$	$acbcab$	$bbacac$	$caabcb$	$cbbaca$
$abaccb$	$acbcba$	$bbacca$	$caacbb$	$cbbcaa$
$abbacc$	$accabb$	$bbcaac$	$cababc$	$cbcaab$
$abbcac$	$accbab$	$bbcaca$	$cabacb$	$cbcaba$
$abbcca$	$accbba$	$bbccaa$	$cabbac$	$cbcbaa$
$abcabc$	$baabcc$	$bcaabc$	$cabbca$	$ccaabb$
$abcacb$	$baacbc$	$bcaacb$	$cabcab$	$ccabab$
$abcbac$	$baaccb$	$bcabac$	$cabcba$	$ccabba$
$abcbca$	$babacc$	$bcabca$	$cacabb$	$ccbaab$
$abccab$	$babcac$	$bcacab$	$cacbab$	$ccbaba$
$abccba$	$babcca$	$bcacba$	$cacbba$	$ccbbaa$

2) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) zur zweiten Classe.

aa, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *bb*, *bc*, *bd*, *be*, *cc*, *cd*, *ce*, *dd*, *de*, *e*

3) Comb. (*a*, *b*, *c*)
(Dritte Classe.)

aaa
aab
aac
abb
abc
acc
bbb
bbc
bcc
ccc

4) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*)
(Dritte Classe.)

aaa	*bbb*
aab	*bbc*
aac	*bbd*
aad	*bcc*
abb	*bcd*
abc	*bdd*
abd	*ccc*
acc	*ccd*
acd	*cdd*
add	*ddd*

5) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*)
(Dritte Classe.)

aaa	*add*	*bee*
aab	*ade*	*ccc*
aac	*aee*	*ccd*
aad	*bbb*	*cce*
aae	*bbc*	*cdd*
abb	*bbd*	*cde*
abc	*bbe*	*cee*
abd	*bcc*	*ddd*
abe	*bcd*	*dde*
acc	*bce*	*dee*
acd	*bdd*	*eee*
ace	*bde*	

6) Comb. (*a*, *b*, *c*)
(Vierte Classe.)

aaaa
aaab
aaac
aabb
aabc
aacc
abbb
abbc
abcc
accc
bbbb
bbbc
bbcc
bccc
cccc

7) Comb. (a, b, c, d)
(Vierte Classe.)

aaaa	*abbd*	*bbcd*
aaab	*abcc*	*bbdd*
aaac	*abcd*	*bccc*
aaad	*abdd*	*bccd*
aabb	*accc*	*bcdd*
aabc	*accd*	*bddd*
aabd	*acdd*	*cccc*
aacc	*addd*	*cccd*
aacd	*bbbb*	*ccdd*
aadd	*bbbc*	*cddd*
abbb	*bbbd*	*dddd*
abbc	*bbcc*	

8) Comb. (a, b, c, d, e)
(Vierte Classe.)

aaaa	*abbe*	*bbbc*	*bdee*
aaab	*abcc*	*bbbd*	*beee*
aaac	*abcd*	*bbbe*	*cccc*
aaad	*abce*	*bbcc*	*cccd*
aaae	*abdd*	*bbcd*	*ccce*
aabb	*abde*	*bbce*	*ccdd*
aabc	*abee*	*bbdd*	*ccde*
aabd	*accc*	*bbde*	*ccee*
aabe	*accd*	*bbee*	*cddd*
aacc	*acce*	*bccc*	*cdde*
aacd	*acdd*	*bccd*	*cdee*
aace	*acde*	*bcce*	*ceee*
aadd	*acee*	*bcdd*	*dddd*
aade	*addd*	*bcde*	*ddde*
aaee	*adde*	*bcee*	*ddee*
abbb	*adee*	*bddd*	*deee*
abbc	*aeee*	*bdde*	*eeee*
abbd	*bbbb*		

9) Comb. (*a*, *b*, *c*)
(Fünfte Classe.)

aaaaa	*abbbc*
aaaab	*abbcc*
aaaac	*abccc*
aaabb	*acccc*
aaabc	*bbbbb*
aaacc	*bbbbc*
aabbb	*bbbcc*
aabbc	*bbccc*
aabcc	*bcccc*
aaccc	*ccccc*
abbbb	

10) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*)
(Fünfte Classe.)

aaaaa	*aabcd*	*abcdd*	*bbccd*
aaaab	*aabdd*	*abddd*	*bbcdd*
aaaac	*aaccc*	*acccc*	*bbddd*
aaaad	*aaccd*	*acccd*	*bcccc*
aaabb	*aacdd*	*accdd*	*bcccd*
aaabc	*aaddd*	*acddd*	*bccdd*
aaabd	*abbbb*	*adddd*	*bcddd*
aaacc	*abbbc*	*bbbbb*	*bdddd*
aaacd	*abbbd*	*bbbbc*	*ccccc*
aaadd	*abbcc*	*bbbbd*	*ccccd*
aabbb	*abbcd*	*bbbcc*	*cccdd*
aabbc	*abbdd*	*bbbcd*	*ccddd*
aabbd	*abccc*	*bbbdd*	*cdddd*
aabcc	*abccd*	*bbccc*	*ddddd*

Die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen für n Elemente ist:

für die 1ste Classe $= n$

— — 2te Classe $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

— — 3te Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

— — 4te Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

....

— — mte Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots m}$

b) Combinationen ohne Wiederholungen.

1) Comb. ($a, b, c, d, e, f, g, h, i$)
(Zweite Classe.)

ab	*ah*	*bg*	*cg*	*dh*	*fg*
ac	*ai*	*bh*	*ch*	*di*	*fh*
ad	*bc*	*bi*	*ci*	*ef*	*fi*
ae	*bd*	*cd*	*de*	*eg*	*gh*
af	*be*	*ce*	*df*	*eh*	*gi*
ag	*bf*	*cf*	*dg*	*ei*	*hi*

2) Comb. (a, b, c, d, e, f)
(Dritte Classe.)

abc	*acd*	*adf*	*bcf*	*cde*
abd	*ace*	*aef*	*bde*	*cdf*
abe	*acf*	*bcd*	*bdf*	*cef*
abf	*ade*	*bce*	*bef*	*def*

3) Comb. (*a, b, c, d, e, f, g, h*)
(Dritte Classe.)

abc adf bcf bfh cgh
abd adg bcg bgh def
abe adh bch cde deg
abf aef bde cdf deh
abg aeg bdf cdg dfg
abh aeh bdg cdh dfh
acd afg bdh cef dgh
ace afh bef ceg efg
acf agh beg ceh efh
acg bcd beh cfg egh
ach bce bfg cfh fgh
ade

4) Comb. (*a, b, c, d, e, f, g*)
(Vierte Classe.)

abcd abfg adfg bdeg
abce acde aefg bdfg
abcf acdf bcde befg
abcg acdg bcdf cdef
abde acef bcdg cdeg
abdf aceg bcef cdfg
abdg acfg bceg cefg
abef adef bcfg defg
abeg adeg bdef

5) Comb. (a, b, c, d, e, f, g, h)
(Fünfte Classe.)

abcde	abdfh	acegh	bcefh
abcdf	abdgh	acfgh	bcegh
abcdg	abefg	adefg	bcfgh
abcdh	abefh	adefh	bdefg
abcef	abegh	adegh	bdefh
abceg	abfgh	adfgh	bdegh
abceh	acdef	aefgh	bdfgh
abcfg	acdeg	bcdef	befgh
abcfh	acdeh	bcdeg	cdefg
abcgh	acdfg	bcdeh	cdefh
abdef	acdfh	bcdfg	cdegh
abdeg	acdgh	bcdfh	cdfgh
abdeh	acefg	bcdgh	cefgh
abdfg	acefh	bcefg	defgh

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen für n Elemente ist:

für die 1ste Classe $= n$

— — 2te Classe $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

— — 3te Classe $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

— — 4te Classe $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

....

— — mte Classe $= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots\cdots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots m}$

3) Variationen.

a) Variationen mit Wiederholungen.

1) Var. (a, b, c, d, e, f)
(Zweite Classe.)

aa	ba	ca	da	ea	fa
ab	bb	cb	db	eb	fb
ac	bc	cc	dc	ec	fc
ad	bd	cd	dd	ed	fd
ae	be	ce	de	ee	fe
af	bf	cf	df	ef	ff

2) Var. (a, b, c, d)
(Dritte Classe.)

aaa	adb	bcc	cbd	dba
aab	adc	bcd	cca	dbb
aac	add	bda	ccb	dbc
aad	baa	bdb	ccc	dbd
aba	bab	bdc	ccd	dca
abb	bac	bdd	cda	dcb
abc	bad	caa	cdb	dcc
abd	bba	cab	cdc	dcd
aca	bbb	cac	cdd	dda
acb	bbc	cad	daa	ddb
acc	bbd	cba	dab	ddc
acd	bca	cbb	dac	ddd
ada	bcb	cbc	dad	

3) Var. (a, b, c)
(Vierte Classe.)

aaaa	abcc	baca	bcbb	cbac
aaab	acaa	bacb	bcbc	cbba
aaac	acab	bacc	bcca	cbbb
aaba	acac	bbaa	bccb	cbbc
aabb	acba	bbab	bccc	cbca
aabc	acbb	bbac	caaa	cbcb
aaca	acbc	bbba	caab	cbcc
aacb	acca	bbbb	caac	ccaa
aacc	accb	bbbc	caba	ccab
abaa	accc	bbca	cabb	ccac
abab	baaa	bbcb	cabc	ccba
abac	baab	bbcc	caca	ccbb
abba	baac	bcaa	cacb	ccbc
abbb	baba	bcab	cacc	ccca
abbc	babb	bcac	cbaa	cccb
abca	babc	bcba	cbab	cccc
abcb				

Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen von Elementen, für die $m$te Classe ist $= n^m$.

2) Comb. (*a, b, c, d, e*) zur zweiten Classe.

aa, ab, ac, ad, ae, bb, bc, bd, be, cc, cd, ce, dd, de, e

3) Comb. (*a, b, c*)
(Dritte Classe.)

aaa
aab
aac
abb
abc
acc
bbb
bbc
bcc
ccc

4) Comb. (*a, b, c, d*)
(Dritte Classe.)

aaa	*bbb*
aab	*bbc*
aac	*bbd*
aad	*bcc*
abb	*bcd*
abc	*bdd*
abd	*ccc*
acc	*ccd*
acd	*cdd*
add	*ddd*

5) Comb. (*a, b, c, d, e*)
(Dritte Classe.)

aaa	*add*	*bee*
aab	*ade*	*ccc*
aac	*aee*	*ccd*
aad	*bbb*	*cce*
aae	*bbc*	*cdd*
abb	*bbd*	*cde*
abc	*bbe*	*cee*
abd	*bcc*	*ddd*
abe	*bcd*	*dde*
acc	*bce*	*dee*
acd	*bdd*	*eee*
ace	*bde*	

6) Comb. (*a, b, c*)
(Vierte Classe.)

aaaa
aaab
aaac
aabb
aabc
aacc
abbb
abbc
abcc
accc
bbbb
bbbc
bbcc
bccc
cccc

7) Comb. (a, b, c, d)
(Vierte Classe.)

aaaa	abbd	bbcd
aaab	abcc	bbdd
aaac	abcd	bccc
aaad	abdd	bccd
aabb	accc	bcdd
aabc	accd	bddd
aabd	acdd	cccc
aacc	addd	cccd
aacd	bbbb	ccdd
aadd	bbbc	cddd
abbb	bbbd	dddd
abbc	bbcc	

8) Comb. (a, b, c, d, e)
(Vierte Classe.)

aaaa	abbe	bbbc	bdee
aaab	abcc	bbbd	beee
aaac	abcd	bbbe	cccc
aaad	abce	bbcc	cccd
aaae	abdd	bbcd	ccce
aabb	abde	bbce	ccdd
aabc	abee	bbdd	ccde
aabd	accc	bbde	ccee
aabe	accd	bbee	cddd
aacc	acce	bccc	cdde
aacd	acdd	bccd	cdee
aace	acde	bcce	ceee
aadd	acee	bcdd	dddd
aade	addd	bcde	ddde
aaee	adde	bcee	ddee
abbb	adee	bddd	deee
abbc	aeee	bdde	eeee
abbd	bbbb		

9) Comb. (*a*, *b*, *c*)
(Fünfte Classe.)

aaaaa
aaaab
aaaac
aaabb
aaabc
aaacc
aabbb
aabbc
aabcc
aaccc
abbbb
abbbc
abbcc
abccc
acccc
bbbbb
bbbbc
bbbcc
bbccc
bcccc
ccccc

10) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*)
(Fünfte Classe.)

aaaaa
aaaab
aaaac
aaaad
aaabb
aaabc
aaabd
aaacc
aaacd
aaadd
aabbb
aabbc
aabbd
aabcc
aabcd
aabdd
aaccc
aaccd
aacdd
aaddd
abbbb
abbbc
abbbd
abbcc
abbcd
abbdd
abccc
abccd
abcdd
abddd
acccc
acccd
accdd
acddd
adddd
bbbbb
bbbbc
bbbbd
bbbcc
bbbcd
bbbdd
bbccc
bbccd
bbcdd
bbddd
bcccc
bcccd
bccdd
bcddd
bdddd
ccccc
ccccd
cccdd
ccddd
cdddd
ddddd

Die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen für n Elemente ist:

für die 1ste Classe $= n$

— — 2te Classe $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

— — 3te Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

— — 4te Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

. . . .

— — $m$te Classe $= \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots m}$

b) Combinationen ohne Wiederholungen.

1) Comb. $(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$
(Zweite Classe.)

ab	ah	bg	cg	dh	fg
ac	ai	bh	ch	di	fh
ad	bc	bi	ci	ef	fi
ae	bd	cd	de	eg	gh
af	be	ce	df	eh	gi
ag	bf	cf	dg	ei	hi

2) Comb. (a, b, c, d, e, f)
(Dritte Classe.)

abc	acd	adf	bcf	cde
abd	ace	aef	bde	cdf
abe	acf	bcd	bdf	cef
abf	ade	bce	bef	def

14) $(3-2x^2)^6 = 729 - 2916x^2 + 4860x^4 - 4320x^6$
$+ 2160x^8 - 576x^{10} + 64x^{12}$

15) $(\frac{1}{2}x + 2y)^7 = \frac{1}{128}x^7 + \frac{7}{32}x^6y + \frac{21}{8}x^5y^2 + \frac{35}{2}x^4y^3$
$+ 70x^3y^4 + 168x^2y^5 + 224xy^6 + 128y^7$

16) $(a^3+3ab)^9 = a^{27} + 27a^{25}b + 324a^{23}b^2 + 2268a^{21}b^3$
$+ 10206a^{19}b^4 + 30618a^{17}b^5 + 61236a^{15}b^6$
$+ 78732a^{13}b^7 + 59049a^{11}b^8 + 19683a^9b^9$

17) $(3ac-2bd)^5 = 243a^5c^5 - 810a^4c^4bd + 1080a^3c^3b^2d^2$
$- 720a^2c^2b^3d^3 + 240acb^4d^4 - 32b^5d^5$

18) $(5a^2c^2d - 4abd^2)^4 = 625a^8c^8d^4 - 2000a^7bc^6d^5$
$+ 2400a^6b^2c^4d^6 - 1280a^5b^3c^2d^7 + 256a^4b^4d^8$

19) $\left(\frac{2ac}{b^2} + \frac{1}{4}bc^2d\right)^6 = 64a^6c^6b^{-12} + 48a^5c^7db^{-9}$
$+ 15a^4c^8d^2b^{-6} + \frac{5}{4}a^3c^9d^3b^{-3} + \frac{15}{64}a^2c^{10}d^4$
$+ \frac{3}{256}ab^3c^{11}d^5 + \frac{1}{4096}b^6c^{12}d^6$

20) $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^4 = a^2 + 6ab + b^2 \pm (4a+4b)\sqrt{ab}$

21) $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^7 = (a^3 + 21a^2b + 35ab^2 + 7b^3)\sqrt{a}$
$\pm (7a^3 + 35a^2b + 21ab^2 + b^3)\sqrt{b}$

22) $(a+b)^n + (a-b)^n = 2\left(a^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2\right.$
$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{n-4}b^4 + \frac{n \cdots n-5}{1 \cdots 6}a^{n-6}b^6$
$\left. + \cdots\cdots \right)$ *)

23) $(a+b)^n - (a-b)^n = 2\left(\frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3\right.$
$\left. + \frac{n \cdots n-4}{1 \cdots 5}a^{n-5}b^5 + \frac{n \cdots n-6}{1 \cdots 7}a^{n-7}b^7 + \cdots\cdots \right)$

---

*) Die Reihen 22, 23, 24, 25, 26, werden so weit fortgesetzt, bis sie abbrechen, d. h., bis die Coefficienten sämmtlich $=0$ werden.

24) $(a \pm b\sqrt{-1})^n = a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2$

$+ \frac{n \cdots n-3}{1 \cdots 4}a^{n-4}b^4 - \text{ꝛc.} \pm \left(\frac{n}{1}a^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3\right.$

$\left. + \frac{n \cdots n-4}{1 \cdots 5}a^{n-5}b^5 - \text{ꝛc.}\right)\sqrt{-1}$

25) $(a+b\sqrt{-1})^n + (a-b\sqrt{-1})^n =$

$2\left[a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n \cdots n-3}{1 \cdots 4}a^{n-4}b^4 - \text{ꝛc.}\right]$ *)

26) $\frac{(a+b\sqrt{-1})^n - (a-b\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}} =$

$2\left[na^{n-1}b - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \frac{n \cdots n-4}{1 \cdots 5}a^{n-5}b^5 - \text{ꝛc.}\right]$

Bestimmung einzelner Glieder.

27) Das 3te Glied von $(a+b)^{15}$ ist $= 105a^{13}b^2$
28) — 5te — — $(a+b)^{16}$ ist $= 1820a^{12}b^4$
29) — 6te — — $(a-b)^{30}$ ist $= -142506a^{25}b^5$
30) — 4te — — $(a-b)^{100}$ ist $= -161700a^{97}b^3$
31) — 5te — — $(a^2-b^2)^{12}$ ist $= 495a^{16}b^8$
32) — 9te — — $(2ab-cd)^{14}$ ist $= 192192a^6b^6c^8d^8$
33) Das mittelste Glied von $(a-b)^{16}$ ist $= 12870a^8b^8$
34) — — — — $(a-b)^{18}$ ist $= -48620a^9b^9$
35) Die beiden mittelsten Glieder von $(a-b)^{17}$ sind
$24310a^9b^8 - 24310a^8b^9$
36) — — — — — $(a-b)^{19}$ sind
$-92378a^{10}b^9 + 92378a^9b^{10}$

---

*) Es ist daher sowohl $(a+b\sqrt{-1})^n + (a-b\sqrt{-1})^n$ als $[(a+b\sqrt{-1})^n - (a-b\sqrt{-1})^n] : \sqrt{-1}$ eine reelle Größe.

2) Der polynomische Satz.

Formeln.

I. Die $n$te Potenz des Polynoms $a+b+c+d\cdots\cdots+x$ bestehet aus der Summe aller Combinationen mit Wiederholungen der Größen $a, b, c, d, \cdots\cdots x$ zur $n$ten Classe, jede mit ihrer Versetzungszahl versehen.

II. Bestehet daher das Polynom $a+b+c+d+\cdots\cdots+x$ aus m Gliedern, so wird die Potenz

$$\frac{m(m+1)(m+2)\cdots\cdots\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots n}$$

Glieder enthalten. Die Summe der Exponenten von $a, b, c, d,\cdots\cdots\cdots x$, in jedem Gliede wird $=n$, und die Summe aller Coefficienten $=m^n$ seyn.

III. Wird, der Kürze wegen, $b+c+d+\cdots\cdots+x=p$ gesetzt, so ist auch:

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots+x)^n=(a+p)^n=$$

$$a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}p+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}p^2+\cdots\cdots\cdots+p^n;$$

welche Formel in vielen Fällen mit Nutzen angewendet werden kann.

Beispiele.

1) $(a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$

2) $(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc$
$+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

3) $(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc$
$+6a^2c^2+4ab^3+12ab^2c+12abc^2+4ac^3+b^4$
$+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$

4) $(a+b+c)^5=a^5+5a^4b+5a^4c+10a^3b^2+20a^3bc$
$+10a^3c^2+10a^2b^3+30a^2b^2c+30a^2bc^2+10a^2c^3$

$+5ab^4+20ab^3c+30ab^2c^2+20abc^3+5ac^4+b^5$
$+5b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3+5bc^4+c^5$

5) $(a+b+c)^6=a^6+6a^5b+6a^5c+15a^4b^2+30a^4bc$
$+15a^4c^2+20a^3b^3+60a^3b^2c+60a^3bc^2+20a^3c^3$
$+15a^2b^4+60a^2b^3c+90a^2b^2c^2+60a^2bc^3+15a^2c^4$
$+6ab^5+30ab^4c+60ab^3c^2+60ab^2c^3+30abc^4$
$+6ac^5+b^6+6b^5c+15b^4c^2+20b^3c^3+15b^2c^4$
$+6bc^5+c^6$

6) $(a+b+c)^7=a^7+7a^6b+7a^6c+21a^5b^2+42a^5bc$
$+21a^5c^2+35a^4b^3+105a^4b^2c+105a^4bc^2+35a^4c^3$
$+35a^3b^4+140a^3b^3c+210a^3b^2c^2+140a^3bc^3$
$+35a^3c^4+21a^2b^5+105a^2b^4c+210a^2b^3c^2$
$+210a^2b^2c^3+105a^2bc^4+21a^2c^5+7ab^6+42ab^5c$
$+105ab^4c^2+140ab^3c^3+105ab^2c^4+42abc^5$
$+7ac^6+b^7+7b^6c+21b^5c^2+35b^4c^3+35b^3c^4$
$+21b^2c^5+7bc^6+c^7$

7) $(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+2ac+2ad+b^2$
$+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$

8) $(a+b+c+d)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3ab^2$
$+6abc+6abd+3ac^2+6acd+3ad^2+b^3$
$+3b^2c+3b^2d+3bc^2+6bcd+3bd^2+c^3+3c^2d$
$+3cd^2+d^3$

9) $(a+b+c+d)^4=a^4+4a^3b+4a^3c+4a^3d+6a^2b^2$
$+12a^2bc+12a^2bd+6a^2c^2+12a^2cd+6a^2d^2$
$+4ab^3+12ab^2c+12ab^2d+12abc^2+24abcd$
$+12abd^2+4ac^3+12ac^2d+12acd^2+4ad^3+b^4$
$+4b^3c+4b^3d+6b^2c^2+12b^2cd+6b^2d^2+4bc^3$
$+12bc^2d+12bcd^2+4bd^3+c^4+4c^3d+6c^2d^2$
$+4cd^3+d^4$

10) $(a+b+c+d)^5=a^5+5a^4b+5a^4c+5a^4d+$
$10a^3b^2+20a^3bc+20a^3bd+10a^3c^2+20a^3cd+$

N.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
13	$a,\ d,\ t$	n	$n = 1 + \frac{t-a}{d}$
14	$a,\ d,\ s$		$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
15	$a,\ t,\ s$		$n = \frac{2s}{a+t}$
16	$d,\ t,\ s$		$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$
17	$d,\ n,\ t$	a	$a = t - (n-1)d$
18	$d,\ n,\ s$		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$
19	$d,\ t,\ s$		$a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{[(t+\frac{1}{2}d)^2 - 2ds]}$
20	$n,\ t,\ s$		$a = \frac{2s}{n} - t$

....

Was heißt eine arithmetische Reihe von der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Ordnung? Und wie werden die folgenden Ordnungen aus der Reihe der ersten Ordnung $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,$ 2c., abgeleitet?

Was sind figurirte Zahlen? Und wie werden sie aus der Reihe $1,\ 1+d,\ 1+2d.$ 2c., abgeleitet? — Was sind insbesondere Polygonalzahlen und Pyramidalzahlen? *)

*) Die Richtigkeit des allgemeinen Gliedes in den nachstehenden Reihen läßt sich durch eine bloße Subtraktion, oder auch umgekehrt durch die Addition, sehr leicht erweisen; denn man darf nur von dem allgemeinen Gliede einer jeden Reihe das ihm unmittelbar vorher=

XI. Progressionen.

1) Arithmetische Progressionen.

I. Bezeichnet a das erste, t das letzte Glied, n die Zahl der Glieder, d den Unterschied und s die Summe einer arithmetischen Progression: so ist

1) $t = a + (n-1)d$

2) $s = (a+t)\frac{n}{2} = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2}$.

Vermittelst dieser beiden Formeln lassen sich die Werthe von t und s bestimmen, wenn die Werthe von a, d und n gegeben sind.

Beispiele.

N.	Gegebene Werthe.			Gesuchte Werthe.	
1	$a=1$,	$d=1$,	$n=14$	$t=14$,	$s=105$
2	$a=2$,	$d=3$,	$n=17$	$t=50$,	$s=442$
3	$a=7$,	$d=\frac{1}{4}$,	$n=16$	$t=10\frac{3}{4}$,	$s=142$
4	$a=2\frac{1}{2}$,	$d=\frac{1}{3}$,	$n=100$	$t=35\frac{1}{2}$,	$s=1900$
5	$a=\frac{3}{4}$,	$d=\frac{1}{8}$,	$n=26$	$t=3\frac{7}{8}$,	$s=60\frac{1}{8}$
6	$a=\frac{5}{7}$,	$d=1\frac{2}{3}$,	$n=13$	$t=20\frac{5}{7}$,	$s=139\frac{2}{7}$
7	$a=-7$,	$d=3$,	$n=8$	$t=14$,	$s=28$
8	$a=-6$,	$d=\frac{3}{4}$,	$n=30$	$t=15\frac{3}{4}$,	$s=146\frac{1}{4}$
9	$a=\frac{1}{2}$,	$d=-\frac{1}{8}$,	$n=20$	$t=-1\frac{7}{8}$,	$s=-13\frac{3}{4}$
10	$a=3\frac{1}{3}$,	$d=-2\frac{5}{6}$,	$n=15$	$t=-36\frac{1}{3}$,	$s=-247\frac{1}{2}$
11	$a=0$,	$d=\frac{1}{2}$,	$n=11$	$t=5$,	$s=27\frac{1}{2}$
12	$a=-10$,	$d=-2$,	$n=6$	$t=-20$,	$s=-90$
13	$a=-\frac{3}{4}$,	$d=-\frac{7}{8}$,	$n=25$	$t=-21\frac{3}{4}$,	$s=-281\frac{1}{4}$

II. Wenn von den fünf Grössen a, d, n, t, s, drei gegeben sind, so lassen sich immer die beiden übrigen bestimmen, wozu die folgende Tafel dienen kann.

Formeltafel für die arithmetischen Progressionen.

N.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1	a, d, n	t	$t=a+(n-1)d$
2	a, d, s		$t=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}$
3	a, n, s		$t=\frac{2s}{n}-a$
4	d, n, s		$t=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$
5	a, d, n	s	$s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$
6	$a, d, t,$		$s=\frac{a+t}{2}+\frac{(t+a)(t-a)}{2d}$
7	a, n, t		$s=\frac{1}{2}n(a+t)$
8	d, n, t		$s=\frac{1}{2}n[2t-(n-1)d]$
9	a, n, t	d	$d=\frac{t-a}{n-1}$
10	a, n, s		$d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}$
11	a, t, s		$d=\frac{(t+a)(t-a)}{2s-t-a}$
12	n, t, s		$d=\frac{2nt-2s}{n(n-1)}$

N.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
13	$a,\ d,\ t$		$n=1+\frac{t-a}{d}$
14	$a,\ d,\ s$	n	$n=\frac{d-2a}{2d}\pm\sqrt{\left[\frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
15	$a,\ t,\ s$		$n=\frac{2s}{a+t}$
16	$d,\ t,\ s$		$n=\frac{2t+d}{2d}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2-\frac{2s}{d}\right]}$
17	$d,\ n,\ t$		$a=t-(n-1)d$
18	$d,\ n,\ s$		$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$
19	$d,\ t,\ s$	a	$a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[(t+\frac{1}{2}d)^2-2ds]}$
20	$n,\ t,\ s$		$a=\frac{2s}{n}-t$

....

Was heißt eine arithmetische Reihe von der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Ordnung? Und wie werden die folgenden Ordnungen aus der Reihe der ersten Ordnung $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,$ ꝛc., abgeleitet?

Was sind figurirte Zahlen? Und wie werden sie aus der Reihe $1,\ 1+d,\ 1+2d.$ ꝛc., abgeleitet? — Was sind insbesondere Polygonalzahlen und Pyramidalzahlen? *)

*) Die Richtigkeit des allgemeinen Gliedes in den nachstehenden Reihen läßt sich durch eine bloße Subtraktion, oder auch umgekehrt durch die Addition, sehr leicht erweisen; denn man darf nur von dem allgemeinen Gliede einer jeden Reihe das ihm unmittelbar vorher-

Reihen der ersten Ordnung mit dem Anfangsgliede 1.

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots\ldots\ldots\ n$

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots\ldots\ldots\ 2n-1$

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16 \ldots\ldots\ldots\ 3n-2$

$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21 \ldots\ldots\ldots\ 4n-3$

....

$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d \ldots\ldots\ dn-d+1$

Polygonalzahlen.

$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21 \ldots\ldots\ \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36 \ldots\ldots\ n^2$

$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51 \ldots\ldots\ \frac{n(3n-1)}{1 \cdot 2}$

$1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ 66 \ldots\ldots\ n(2n-1)$

....

$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d \ldots\ldots\ \frac{n(dn-d+2)}{1 \cdot 2}$

Pyramidalzahlen.

$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56 \ldots\ldots\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91 \ldots\ldots\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

---

gehende abziehen, so wird man das allgemeine Glied der Reihe erhalten, aus welcher sie durch die Summirung entsprungen ist. So z. B. erhält man aus dem allgemeinen Gliede der Triangularzahlen $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ das allgemeine Glied der natürlichen Zahlen $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} = n$.

$1, 6, 18, 40, 75, 126 \ldots\ldots \frac{n^2(n+1)}{1 \cdot 2}$

$1, 7, 22, 50, 95, 161 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(4n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

....

$1, 3+d, 6+4d, 10+10d \ldots \frac{n(n+1)(dn-d+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Reihen, welche aus den natürlichen Zahlen durch die Summirung entspringen.

$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots n$

$1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots\ldots \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

$1, 4, 10, 20, 35, 56 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$1, 5, 15, 35, 70, 126 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

u. s. w.

---

2) Geometrische Progressionen.

I. Bezeichnet a das erste Glied, e den Exponenten, t das letzte Glied, n die Anzahl der Glieder und s die Summe einer geometrischen Progression; so ist:

1) $t = ae^{n-1}$

2) $s = \frac{et-a}{e-1} = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$

Vermittelst dieser beiden Formeln lassen sich die Werthe von t und s bestimmen, wenn a, e, n, gegeben sind.

N.	Gegebene Werthe.			Gesuchte Werthe.	
1	$a=1,$	$e=2,$	$n=7$	$t=64,$	$s=127$
2	$a=4,$	$e=3,$	$n=10$	$t=78732,$	$s=118096$
3	$a=5,$	$e=4,$	$n=9$	$t=327680,$	$s=436905$
4	$a=9,$	$e=\frac{7}{4},$	$n=7$	$t=258\frac{2073}{4096},$	$s=591\frac{741}{4096}$
5	$a=6\frac{1}{4},$	$e=\frac{3}{2},$	$n=8$	$t=106\frac{403}{512},$	$s=307\frac{441}{512}$
6	$a=6,$	$e=\frac{8}{4},$	$n=6$	$t=1\frac{217}{512},$	$s=19\frac{373}{512}$
7	$a=8,$	$e=\frac{1}{2},$	$n=15$	$t=\frac{1}{2048},$	$s=15\frac{2047}{2048}$
8	$a=3\frac{1}{2},$	$e=\frac{3}{5},$	$n=8$	$t=\frac{15309}{151250},$	$s=8\frac{45237}{75625}$
9	$a=\frac{5}{6},$	$e=\frac{2}{3},$	$n=11$	$t=\frac{2560}{177147},$	$s=2\frac{166907}{354294}$
10	$a=3,$	$e=\frac{7}{5},$	$n=25$	$t=9642,59\cdots,$	$s=33741,59\cdots$
11	$a=7\frac{1}{2},$	$e=\frac{27}{20},$	$n=31$	$t=60964,11\cdots,$	$s=235125,85\cdot$
12	$a=63,$	$e=\frac{157}{132},$	$n=58$	$t=1238530,19\cdots$	$s=7777637,01$
13	$a=5560,$	$e=\frac{9}{11},$	$n=40$	$t=2,219309\cdots$	$s=30570,0131$
14	$a=393\frac{1}{3},$	$e=\frac{5}{12},$	$n=17$	$t=0,0003246241\cdots,$	$s=674,285482$
15	$a=1,$	$e=\frac{1}{2},$	$n=\infty$	$t=0,$	$s=2$
16	$a=40,$	$e=\frac{3}{7},$	$n=\infty$	$t=0,$	$s=70$
17	$a=9,$	$e=\frac{2}{3},$	$n=\infty$	$t=0,$	$s=27$

In den Beispielen 10, 11, 12, 13, 14 werden die Werthe von t am bequemsten durch Logarithmen berechnet, woraus sich alsdann die Werthe von s leicht finden lassen.

. . . .

Was ist die Summe der geometrischen Progression von n Gliedern: $a,\ b,\ \frac{b^2}{a},\ \frac{b^3}{a^2},\ \frac{b^4}{a^3},\ \ldots\ldots\ \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$? Und was die Summe derselben, wenn die Anzahl der Glieder unbegränzt oder unendlich ist?

Antw. Die Summe der endlichen Progression ist $= \frac{b^n - a^n}{(b-a)a^{n-2}} = \frac{a^n - b^n}{(a-b)a^{n-2}}$; die Summe der unendlichen $= \frac{a^2}{a-b}$.

Was ist die Summe der unbegränzten geometrischen Reihe $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} -$ ꝛc.?

Antw. $\frac{a^2}{a-b}$.

Wie läßt sich der periodische Decimalbruch 0,868686······ $= 86(0,01 + 0,0001 + 0,000001 + \cdots\cdots)$ durch einen gewöhnlichen Bruch ausdrücken?

Antw. Durch $\frac{86}{99}$.

Wie ferner der periodische Decimalbruch 0,375375375···?

Antw. Durch $\frac{375}{999} = \frac{125}{333}$.

Wie der Decimalbruch 0,142857 ······, dessen Periode 142857 ist?

Antw. Durch $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

Es läßt sich also jeder unbegränzte periodische Decimalbruch durch einen endlichen Bruch darstellen.

· · · · · · · · · · · · · · ·

II. Wenn von den Größen *a*, *e*, *n*, *t*, *s* drei gegeben sind, so lassen sich auch immer die beiden übrigen bestimmen, wozu die folgende Tafel dient.

Formeltafel für die geometrischen Progressionen.

N.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1	$a,\ e,\ n$	t	$t = ae^{n-1}$
2	$a,\ e,\ s$	t	$t = \frac{a + (e-1)s}{e}$
3	$a,\ n,\ s$	t	$t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$
4	$e,\ n,\ s$	t	$t = \frac{(e-1)se^{n-1}}{e^n - 1}$
5	$a,\ e,\ n$	s	$s = \frac{a(e^n - 1)}{e-1}$
6	$a,\ e,\ t$	s	$s = \frac{et - a}{e-1}$
7	$a,\ n,\ t$	s	$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
8	$e,\ n,\ t$	s	$s = \frac{t(e^n - 1)}{(e-1)e^{n-1}}$
9	$e,\ n,\ t$	a	$a = \frac{t}{e^{n-1}}$
10	$e,\ n,\ s$	a	$a = \frac{(e-1)s}{e^n - 1}$
11	$e,\ t,\ s$	a	$a = et - (e-1)s$
12	$n,\ t,\ s$	a	$a(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$

N.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
13	a, n, t	e	$e=\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
14	a, n, s		$e^n-\frac{s}{a}e+\frac{s-a}{a}=0$
15	a, t, s		$e=\frac{s-a}{s-t}$
16	n, t, s		$e^n-\frac{s}{s-t}e^{n-1}+\frac{t}{s-t}=0$
17	a, e, t	n	$n=\frac{\log t-\log a}{\log e}+1$
18	a, e, s		$n=\frac{\log[a+(e-1)s]-\log a}{\log e}$
19	a, t, s		$n=\frac{\log t-\log a}{\log(s-a)-\log(s-t)}+1$
20	e, t, s		$n=\frac{\log t-\log[et-(e-1)s]}{\log e}+1$

XII. Continuirliche oder Kettenbrüche.

1) Kettenbrüche im Allgemeinen.

1. Ein Kettenbruch ist ein Bruch von nachstehender Form:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{rc.}}}}}}$$

dessen Bedeutung sich aus der Art, wie er geschrieben wird, ergiebt. Es wird dabei angenommen, daß die Größen a, b, c, d, e, ꝛc., welche man die Quotienten zu nennen pflegt, sämmtlich ganze Zahlen und nicht kleiner als die Einheit seyen. Die Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$, $\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}$ ꝛc., heißen die Näherungsbrüche desselben, weil sie in der That dem gegebenen Bruche immer näher kommen, je weiter man sie fortsetzt.

II. Verwandelt man diese Näherungsbrüche in gewöhnliche Brüche, so erhält man nachstehende Näherungswerthe:

1) $\frac{1}{a}$

2) $\frac{b}{ab+1}$

3) $\frac{bc+1}{(ab+1)c+a}$

4) $\frac{(bc+1)d+b}{(abc+c+a)d+ab+1}$

5) $\frac{(bcd+d+b)e+bc+1}{(abcd+cd+ad+ab+1)e+abc+c+a}$

u. s. w.

III. Diese Näherungswerthe können, wie folgt, von einander abgeleitet werden. Es sey $\frac{R}{S}$ der $(n-1)$te und $\frac{T}{V}$ der $(n-2)$te Werth; es sey ferner q der $n$te von den Quotienten a, b, c, d, u. s. w., so ist der $n$te Näherungswerth $=\frac{qR+T}{qS+V}$.

IV. Ein so gefundener Näherungswerth erscheint immer in seiner einfachsten Gestalt; der Zähler und Nenner desselben haben niemals ein gemeinschaftliches Maaß.

V. Die Näherungswerthe sind abwechselnd größer und kleiner als der Werth des ganzen kontinuirlichen Bruches oder als die Größe, welcher er gleich ist.

VI. Der Unterschied zwischen zwei nächsten Näherungswerthen ist abwechselnd positiv und negativ; er ist immer ein Bruch, dessen Zähler $=1$, und dessen Nenner ein Product aus den Nennern jener beiden Werthe ist.

VII. Werden alle Quotienten zur Bestimmung des Näherungswerthes gebraucht, so erhält man den Werth des gangen kontinuirlichen Bruches.

VIII. Um irgend eine Größe X, von welcher Form dieselbe auch seyn mag, in einen kontinuirlichen Bruch zu verwandeln, gebe man derselben die Form $a+\frac{1}{x}$, wo a die größte in X enthaltene ganze Zahl bezeichnet und daher auch $=0$ seyn kann, in dem Falle, wo $X<1$ seyn sollte. Eben so gebe man dem Nenner x die Form $a'+\frac{1}{x'}$; dem Nenner x' die Form $a''+\frac{1}{x''}$; dem Nenner x'' die Form $a'''+\frac{1}{x'''}$; u. s. w.; indem man a', a'', a''', rc. die größten in x, x', x'', rc., enthaltenen Ganzen seyn läßt: alsdann wird man haben:

$$X=a+\cfrac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+\cfrac{1}{a'''+\text{rc.}}}}$$

Läßt sich nun die Größe X wirklich durch einen gewöhnlichen Bruch darstellen, so wird auch der kontinuirliche Bruch enden; im entgegengesetzten Fall wird er ins Unendliche fortlaufen.

IX. Der Unterschied zwischen der Größe X und irgend

einem ihrer Näherungswerthe ist immer kleiner als $\frac{1}{q^2}$, wenn q den Nenner dieses Näherungswerthes bezeichnet. Man hat also hierin ein sicheres Mittel, um zu erfahren, wie nahe man jedesmal der Größe X gekommen ist.

2) Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Kettenbrüche.

Nachstehendes Schema versinnlicht das zu beobachtende Verfahren mit Hinsicht auf das allgemeine Princip in VIII.

$$\frac{351}{965}=\frac{1}{2+\frac{263}{351}},\quad \frac{263}{351}=\frac{1}{1+\frac{88}{263}},\quad \frac{88}{263}=\frac{1}{2+\frac{87}{88}},\quad \frac{87}{88}=\frac{1}{1+\frac{1}{87}}.$$

Daher ist

$$\frac{351}{965}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{87}}}}}$$

Beispiele.

N.	Gegeb. Br.	Quotienten.	Näherungswerthe.
1	$\frac{351}{965}$	2, 1, 2, 1, 87	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$
2	$\frac{251}{764}$	3, 22, 1, 4, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{22}{67}$, $\frac{23}{70}$, $\frac{114}{347}$
3	$\frac{1769}{5537}$	3, 7, 1, 2, 4, 5, 1, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{23}{72}$, $\frac{100}{313}$, $\frac{523}{1637}$, $\frac{623}{1950}$

N.	Gegeb. Br.	Quotienten.	Näherungswerthe.
4	$\frac{907}{18564}$	20, 2, 7, 5, 2, 1, 3	$\frac{1}{20}$, $\frac{2}{41}$, $\frac{15}{307}$, $\frac{77}{1576}$, $\frac{169}{3459}$, $\frac{246}{5035}$
5	$\frac{1947}{3359}$	1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3	$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{19}$, $\frac{40}{69}$, $\frac{91}{157}$, $\frac{131}{226}$, $\frac{222}{383}$, $\frac{575}{992}$
6	$\frac{587}{1943}$	3, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{13}{43}$, $\frac{29}{96}$, $\frac{100}{331}$, $\frac{129}{427}$, $\frac{229}{758}$
7	$\frac{5065}{13891}$	2, 1, 2, 1, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 13	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{31}{85}$, $\frac{35}{96}$, $\frac{66}{181}$, $\frac{101}{277}$, $\frac{268}{735}$, $\frac{869}{1012}$
8	$\frac{5743}{80937}$	14, 10, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 3	$\frac{1}{14}$, $\frac{10}{141}$, $\frac{11}{155}$, $\frac{32}{451}$, $\frac{43}{606}$, $\frac{161}{2269}$, $\frac{526}{7413}$, $\frac{1739}{24508}$
9	$\frac{13957}{59476}$	4, 3, 1, 4, 1, 2, 1, 11, 2, 6	$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{19}{81}$, $\frac{23}{98}$, $\frac{65}{277}$, $\frac{88}{375}$, $\frac{1033}{4402}$, $\frac{2154}{9179}$
10	$\frac{3215763}{94218374}$	29, 3, 2, 1, 8, 1, 1, 6, ꝛc.	$\frac{1}{29}$, $\frac{3}{88}$, $\frac{7}{205}$, $\frac{10}{293}$, $\frac{87}{2549}$, $\frac{97}{2842}$, $\frac{184}{5391}$, ꝛc.

Der Sideralmonat oder die Zeit, in welcher der Mond seinen Umlauf am gestirnten Himmel wirklich vollendet, hat, im Mittel von hundert Jahren gerechnet, 27,321661 Tage. Er würde also nach dieser Angabe 1000000 Umläufe in 27321661 Tagen machen. Wie läßt sich nun dieses, durch zu große Zahlen ausgedrückte, Verhältniß durch kleinere Zahlen darstellen?

Antw. Die Näherungswerthe von 27,321661 sind $\frac{27}{1}$, $\frac{82}{3}$, $\frac{765}{28}$, $\frac{3907}{143}$, 2c. Nehmen wir den dritten, so macht der Mond 28 Umläufe in 765 Tagen, welches von der Wahrheit nur etwas über 0,0001 Tage abweicht.

Nach Laplace, einem der größten Mathematiker, ist die Sideral-Umlaufszeit des Merkurs 87,969255, und die der Venus 224,700817 Tage. Wie lassen sich diese Umlaufszeiten durch kleinere Zahlen darstellen?

Antw. Die des Merkurs durch $\frac{87}{1}$, $\frac{88}{1}$, $\frac{2815}{32}$, 2c.; die der Venus durch $\frac{224}{1}$, $\frac{225}{1}$, $\frac{674}{3}$, $\frac{1573}{7}$, $\frac{2247}{10}$, $\frac{26290}{117}$, 2c. Die Brüche $\frac{2815}{32}$ und $\frac{26290}{117}$ geben sie schon ziemlich genau.

Die Peripherie eines Kreises verhält sich zum Durchmesser desselben, wie 3,1415926535.. zu 1. Wie läßt sich dieses Verhältniß durch kleinere Zahlen darstellen?

Antw. Durch 3 : 1; 22 : 7; 333 : 106; 355 : 113; 103993 : 33102; u. s. w.

3). Verwandlungen der Wurzelgröße $\sqrt{A}$ in einen kontinuirlichen Bruch.

Es wird angenommen, daß A eine ganze Zahl sey. Nachstehendes Schema zeigt alsdann das Verfahren mit Hinsicht auf das allgemeine Princip in VIII.

$$X=\sqrt{19}=4+\frac{\sqrt{19}-4}{1}\left(=\frac{1}{x}\right)$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}\left(=\frac{1}{x'}\right)$$

$$x'=\frac{3}{\sqrt{19}-2}=\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}\left(=\frac{1}{x''}\right)$$

$$x''=\frac{5}{\sqrt{19}-3}=\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}\left(=\frac{1}{x'''}\right)$$

$$x'''=\frac{2}{\sqrt{19}-3}=\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}\left(=\frac{1}{x^{IV}}\right)$$

$$x^{IV}=\frac{5}{\sqrt{19}-2}=\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}\left(=\frac{1}{x^{V}}\right)$$

$$x^{V}=\frac{3}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{1}=8+\frac{\sqrt{19}-4}{1}\left(=\frac{1}{x^{VI}}\right)$$

$$x^{VI}=\frac{1}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+ \text{ ꝛc.}$$

Die Quotienten sind also hier 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, ꝛc.

Beispiele.

N.	Ggb. Wrzg.	Quotienten.	Näherungswerthe.
1	$\sqrt{28}$	5, 3, 2, 3, 10, ꝛc.	$\frac{5}{1}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{37}{7}$, $\frac{127}{24}$, $\frac{1307}{247}$, ꝛc.
2	$\sqrt{31}$	5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, ꝛc.	$\frac{5}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{39}{7}$, $\frac{206}{37}$, $\frac{657}{118}$, $\frac{863}{155}$, $\frac{1520}{273}$, $\frac{16063}{2885}$, ꝛc.

N.	Ggb. Wrzl.	Quotienten.	Näherungswerthe.
3	$\sqrt{44}$	6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12, ꝛc.	$\frac{6}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{53}{8}$, $\frac{73}{11}$, $\frac{126}{19}$, $\frac{199}{30}$, $\frac{2514}{379}$, ꝛc.
4	$\sqrt{45}$	6, 1, 2, 2, 2, 1, 12, ꝛc.	$\frac{6}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{47}{7}$, $\frac{114}{17}$, $\frac{161}{24}$, $\frac{2046}{305}$, ꝛc.
5	$\sqrt{52}$	7, 4, 1, 2, 1, 4, 14 ꝛc.	$\frac{7}{1}$, $\frac{29}{4}$, $\frac{36}{5}$, $\frac{101}{14}$, $\frac{137}{19}$, $\frac{649}{90}$, $\frac{9223}{1279}$, ꝛc.
6	$\sqrt{53}$	7, 3, 1, 1, 3, 14 ꝛc.	$\frac{7}{1}$, $\frac{22}{3}$, $\frac{29}{4}$, $\frac{51}{7}$, $\frac{182}{25}$, $\frac{2599}{357}$, ꝛc.
7	$\sqrt{59}$	7, 1, 2, 7, 2, 1, 14, ꝛc.	$\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{23}{3}$, $\frac{169}{22}$, $\frac{361}{47}$, $\frac{530}{69}$, $\frac{7781}{1013}$, ꝛc.
8	$\sqrt{67}$	8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, ꝛc.	$\frac{8}{1}$, $\frac{41}{5}$, $\frac{90}{11}$, $\frac{131}{16}$, $\frac{221}{27}$, $\frac{1678}{205}$, $\frac{1899}{232}$, $\frac{3577}{437}$, $\frac{9053}{1106}$, $\frac{48842}{5967}$, $\frac{790525}{96578}$, ꝛc.

Bei aufmerksamer Betrachtung der Quotienten für die Wurzelgröße $\sqrt{A}$ wird man nachstehende Eigenschaften wahrnehmen.

1) Die Quotienten bilden Perioden, und es dürfte daher in den obigen Beispielen nur die erste gegeben werden. Sie fängt mit dem zweiten Quotienten an, und endet mit einem Quotienten, der doppelt so groß ist als der erste.

2) Läßt man den letzten Quotienten der Periode außer Acht, so beobachten die übrigen folgende Ordnung:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \cdots\cdots\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha$$

so daß Folge und Größe ungeändert bleibt, wenn man sie in umgekehrter Ordnung schreibt.

3) Es bezeichne im Allgemeinen $\frac{p}{q}$ den Näherungswerth, welcher zu dem Quotienten gehört, der dem letzten Quotienten irgend einer der Perioden vorhergeht; so ist immer:

$$p^2 - Aq^2 = \pm 1.$$

Die obigen Beispiele erläutern dieses, wenigstens für die erste Periode. Denn es ist: $127^2 - 28 \cdot 24^2 = +1$, $1520^2 - 31 \cdot 273^2 = +1$, $199^2 - 44 \cdot 30^2 = +1$, $161^2 - 45 \cdot 24^2 = +1$, $649^2 - 52 \cdot 90^2 = +1$, $182^2 - 53 \cdot 25^2 = -1$, $530^2 - 59 \cdot 69^2 = +1$, $48842^2 - 67 \cdot 5967^2 = +1$.

4) Es ist nämlich $p^2 - Aq^2 = +1$ durchgängig für alle Perioden, wenn die Periode, welche zur Zahl A gehört, aus einer geraden Zahl von Quotienten bestehet; ist hingegen diese Zahl ungerade, so ist $p^2 - Aq^2$ abwechselnd $= -1$ und $+1$.

5) Bei den Verwandlungen, welche zur Bestimmung der Quotienten nöthig sind, wird man es immer nur mit ganzen Zahlen, nie mit Brüchen zu thun haben.

. . . .

Die Kettenbrüche haben, außer den oben angeführten, noch mehrere sehr merkwürdige Eigenschaften. Auch haben sie einen bedeutenden praktischen Werth. Mit Hülfe derselben ist man z. B. im Stande, die Verhältnisse, welche in sehr großen Zahlen angegeben sind, mit der größten Genauigkeit durch kleinere Zahlen darzustellen, wie oben schon an einigen Beispielen gezeigt worden. Es läßt sich nämlich streng beweisen, daß, wenn man die Glieder des Verhältnisses in Form eines Bruches unter einander setzt und die Näherungswerthe dieses Bruches sucht, man durchaus keine finden könne, welche mit kleineren Zahlen geschrieben werden und doch zugleich dem gegebenen Bruche näher kommen sollten, wie die, welche die Kettenbrüche geben.

Ein kleines, ziemlich vollständiges und sehr deutliches Werkchen über die kontinuirlichen Brüche ist nachstehendes: Die Lehre von den kontinuirlichen Brüchen nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen auf Arithmetik und Algebra, vollständig abgehandelt von C. J. Kausler. Stuttgard 1803. Vollständig, jedoch nur in Hinsicht auf die Zahlenlehre, findet man diesen Gegenstand in der Théorie des nombres von Legendre abgehandelt, wo man auch die Beweise zu den letzten von den obigen Sätzen antrifft.

Zweite Abtheilung,
enthaltend
die algebraischen Gleichungen.

XIII. Strenge Auflösung der algebraischen Gleichungen, nebst einigen vorläufigen Bemerkungen.

1) Die Gleichungen im Allgemeinen.

I. Eine Gleichung im Allgemeinen, ohne nähere Bestimmung, ist nichts anders als eine Gleichsetzung zweier Ausdrücke; und diese werden die Theile derselben genannt. Eine Gleichung, wofern sie nicht gar identisch ist, ist entweder analytisch oder algebraisch.

II. Eine analytische Gleichung ist eine solche, in welcher die Gleichheit der beiden Theile einzig und allein aus der Erklärung der Zeichen und der bezeichneten Begriffe, entweder unmittelbar oder durch eine Folge von Schlüssen dargethan werden kann. Es müssen daher alle Umformungen, welche nöthig sind, um dem einen der beiden Theile die Form des andern zu geben, sich bloß aus der Erklärung der Zeichen und der bezeichneten Begriffe herleiten lassen. Von dieser Art möchten wohl fast alle in der vorigen Abtheilung vorgekommenen Gleichungen seyn. Sind darin Buchstaben enthalten, so ist es gleichgültig,

welche Werthe man denselben beilegen mag; immer werden die beiden Theile einander gleich bleiben.

III. Eine algebraische Gleichung hingegen ist eine solche, welche nur dadurch wahr werden kann, daß man den darin enthaltenen, durch Buchstaben bezeichneten Größen, entweder gewisse, nicht willkührliche, Zahlenwerthe beilegt, oder wenigstens einigen derselben zu den übrigen ein solches Verhältniß giebt, daß sie zu einer analytischen wird, d. h., zu einer solchen, deren Wahrheit von den Werthen der übrigen unabhängig ist. Von dieser Art möchten wohl beinahe alle in dieser Abtheilung vorkommenden Gleichungen seyn.

IV. Die Algebra nun ist die Wissenschaft von der Herleitung des Gesuchten aus dem Gegebenen vermittelst der Zeichen und der Gleichungen. Sie hat es daher mit der Auflösung der Aufgaben zu thun. Die Aufgabe wird zergliedert; es werden Verhältnisse zwischen dem Gesuchten und dem Gegebenen aufgefunden, und diese Verhältnisse werden mit Hülfe der Zeichen in Gleichungen dargestellt, ohne irgend einen anderen Unterschied zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten zu machen als den der Bezeichnung. Die letzten Buchstaben des Alphabets dienen in der Regel zur Bezeichnung des Gesuchten.

V. Die Analysis der Neuern hat es bloß mit der Umwandlung der Formen und daher bloß mit analytischen Gleichungen zu thun. Die Analysis der Neuern ist also von der Algebra wesentlich verschieden, obgleich beide in ihren höheren Theilen vereint fortgehen und ihrer gegenseitigen Hülfe nicht entbehren können. Das, was man gewöhnlich unter dem Namen der Buchstabenrechnung zu begreifen pflegt, enthält nur die Elemente dieses vielumfassenden Zweiges der Größenlehre.

VI. Die Analysis der Alten hingegen ist von unserer Algebra im Wesentlichen nicht verschieden; die letztere hat bloß den sehr bedeutenden Vortheil einer wissenschaftlichen Bezeichnung voraus. Beide haben es übrigens mit der Herleitung des Gesuchten aus dem Gegebenen durch Aufsuchung ihrer gegenseitigen Verhältnisse und durch Zurückführung derselben auf einfachere, weniger verwickelte, zu thun.

VII. Wie die Gleichungen behandelt und aufgelöst werden, wird in den Lehrbüchern gezeigt. Nachstehendes verdient jedoch wohl bemerkt zu werden, weil Anfänger, bei der Auflösung der Aufgaben, an dieser Klippe leicht zu scheitern pflegen. Zur völligen Bestimmung der gesuchten Größen aus den gegebenen gehören eben so viele Gleichungen, als es der gesuchten Größen giebt. Von diesen Gleichungen darf aber keine analytisch seyn; auch darf keine derselben so beschaffen seyn, daß sie eine nothwendige Folge der übrigen ist und sich aus diesen ableiten läßt. Gleichungen, welche diesen beiden Erfordernissen nicht entsprechen, müssen als unbrauchbar zur Auflösung der Aufgabe verworfen werden.

---

2) Gleichungen vom ersten Grade.

a) Mit einer unbekannten Größe.

1) G. $ax \pm b = c$ *)

A. $x = \frac{c \mp b}{a}$

---

*) G. bezeichnet Gleichung und A. Auflösung.

2) G. $3a + x - 5b + 2 = 7b - a + c + 6$
   A. $x = 12b - 4a + c + 4$

3) G. $7 - 9a - 5x + 3cd + x = \frac{7}{4} - 3a - 2cd - 2x$
   A. $x = \frac{21}{8} - 3a + \frac{5}{2}cd$

4) G. $8x - 5 = 13 - 7x$
   A. $x = 1\frac{1}{5}$

5) G. $13\frac{3}{4} - \frac{x}{2} = 2x - 8\frac{3}{4}$
   A. $x = 9$

6) G. $2x + 7 + \frac{3}{2}x = 6x - 23$
   A. $x = 12$

7) G. $12\frac{1}{4} + 3x - 6 - \frac{7x}{3} = \frac{3x}{4} - 5\frac{3}{8}$
   A. $x = 139\frac{1}{2}$.

8) G. $-6\frac{1}{3}x + 158\frac{1}{4} - 10x = -\frac{37x}{6} + 19 + \frac{3}{8}x$
   A. $x = 13\frac{59}{253}$

9) G. $8\frac{3}{4} + \frac{3x}{7} - \frac{5}{6} + 2x - \frac{12x}{5} + 13 + \frac{x}{4} = 0$
   A. $x = -75\frac{10}{117}$

10) G. $\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} = -15$
   A. $x = 66\frac{2}{3}$

11) G. $3\frac{2}{3} - x - \frac{9x}{2} + 8 = -17 - \frac{3x}{5} + \frac{3}{2}x$
   A. $x = 4\frac{23}{48}$

12) G. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7x - 712 + \frac{x}{5}$
   A. $x = 116\frac{148}{367}$

13) G. $11\frac{1}{2}x = \frac{11}{8}x + 66\frac{3}{8} - 5x - 9\frac{1}{4}$
   A. $x = 3\frac{94}{121}$

14) G. $-\frac{16}{7}x = -\frac{1}{2}x + 412\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x - 316\frac{1}{2}$

A. $x = -80\frac{80}{83}$

15) G. $32\frac{1}{10}x + 176\frac{3}{4} - x = 19\frac{1}{3}x + 7345 - \frac{2x}{3}$

A. $x = 576\frac{399}{746}$

16) G. $3,25x - 5,007 - x = 0,2 - 0,34x$

A. $x = 2,010424\cdots$

17) G. $13,2 \cdot x - \frac{3x}{4} + 7,6953 = \frac{x}{5} + 7834,5$

A. $x = 638,92283\cdots$

18) G. $\frac{7,53x}{18} + 100 = \frac{2x}{5} + 3,86 - \frac{x}{6}$

A. $x = -519,67567\cdots$

19) G. $ax + c = bx + d$

A. $x = \frac{d-c}{a-b}$

20) G. $\frac{f^2 x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a+c)x$

A. $x = \frac{(a^2 - cf)cg}{(f^2 - ch - acg)f}$

21) G. $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$

A. $x = \frac{(ad+bc)e}{de-cf}$

22) G. $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} - g = h$

A. $x = \frac{(h+g)bdf}{b(de+cf)+adf}$

23) G. $\frac{5}{6}ab + \frac{4}{5}ac - \frac{2}{3}cx = \frac{3}{4}ac + 2ab - 6cx$

A. $x = \frac{(70b-3c)a}{320c}$

VI. Die Analysis der Alten hingegen ist von unserer Algebra im Wesentlichen nicht verschieden; die letztere hat bloß den sehr bedeutendeu Vortheil einer wissenschaftlichen Bezeichnung voraus. Beide haben es übrigens mit der Herleitung des Gesuchten aus dem Gegebenen durch Aufsuchung ihrer gegenseitigen Verhältnisse und durch Zurückführung derselben auf einfachere, weniger verwickelte, zu thun.

VII. Wie die Gleichungen behandelt und aufgelöst werden, wird in den Lehrbüchern gezeigt. Nachstehendes verdient jedoch wohl bemerkt zu werden, weil Anfänger, bei der Auflösung der Aufgaben, an dieser Klippe leicht zu scheitern pflegen. Zur völligen Bestimmung der gesuchten Größen aus den gegebenen gehören eben so viele Gleichungen, als es der gesuchten Größen giebt. Von diesen Gleichungen darf aber keine analytisch seyn; auch darf keine derselben so beschaffen seyn, daß sie eine nothwendige Folge der übrigen ist und sich aus diesen ableiten läßt. Gleichungen, welche diesen beiden Erforderniſſen nicht entsprechen, müssen als unbrauchbar zur Auflösung der Aufgabe verworfen werden.

---

2) Gleichungen vom ersten Grade.

a) Mit einer unbekannten Größe.

1) G. $ax \pm b = c$ *)

A. $x = \frac{c \mp b}{a}$

---

*) G. bezeichnet Gleichung und A. Auflösung.

2) G. $3a + x - 5b + 2 = 7b - a + c + 6$
 A. $x = 12b - 4a + c + 4$

3) G. $7 - 9a - 5x + 3cd + x = \frac{7}{4} - 3a - 2cd - 2x$
 A. $x = \frac{21}{8} - 3a + \frac{5}{2}cd$

4) G. $8x - 5 = 13 - 7x$
 A. $x = 1\frac{1}{5}$

5) G. $13\frac{3}{4} - \frac{x}{2} = 2x - 8\frac{3}{4}$
 A. $x = 9$

6) G. $2x + 7 + \frac{3}{2}x = 6x - 23$
 A. $x = 12$

7) G. $12\frac{1}{4} + 3x - 6 - \frac{7x}{3} = \frac{3x}{4} - 5\frac{3}{8}$
 A. $x = 139\frac{1}{2}$.

8) G. $-6\frac{1}{3}x + 158\frac{1}{4} - 10x = -\frac{37x}{6} + 19 + \frac{3}{8}x$
 A. $x = 13\frac{59}{253}$

9) G. $8\frac{3}{4} + \frac{3x}{7} - \frac{5}{6} + 2x - \frac{12x}{5} + 13 + \frac{x}{4} = 0$
 A. $x = -75\frac{10}{117}$

10) G. $\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} = -15$
 A. $x = 66\frac{2}{3}$

11) G. $3\frac{2}{3} - x - \frac{9x}{2} + 8 = -17 - \frac{3x}{5} + \frac{3}{2}x$
 A. $x = 4\frac{23}{48}$

12) G. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7x - 712 + \frac{x}{5}$
 A. $x = 116\frac{148}{367}$

13) G. $11\frac{1}{2}x = \frac{11}{8}x + 66\frac{3}{8} - 5x - 9\frac{1}{4}$
 A. $x = 3\frac{94}{121}$

14) G. $-\frac{16}{7}x = -\frac{1}{2}x + 412\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x - 316\frac{1}{2}$

A. $x = -80\frac{80}{83}$

15) G. $32\frac{1}{10}x + 176\frac{3}{4} - x = 19\frac{1}{3}x + 7345 - \frac{2x}{3}$

A. $x = 576\frac{399}{746}$

16) G. $3{,}25x - 5{,}007 - x = 0{,}2 - 0{,}34x$

A. $x = 2{,}010424\cdots$

17) G. $13{,}2 \cdot x - \frac{3x}{4} + 7{,}6953 = \frac{x}{5} + 7834{,}5$

A. $x = 638{,}92283\cdots$

18) G. $\frac{7{,}53x}{18} + 100 = \frac{2x}{5} + 3{,}86 - \frac{x}{6}$

A. $x = -519{,}67567\cdots$

19) G. $ax + c = bx + d$

A. $x = \frac{d-c}{a-b}$

20) G. $\frac{f^2 x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a+c)x$

A. $x = \frac{(a^2 - cf)cg}{(f^2 - ch - acg)f}$

21) G. $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$

A. $x = \frac{(ad+bc)e}{de-cf}$

22) G. $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} - g = h$

A. $x = \frac{(h+g)bdf}{b(de+cf)+adf}$

23) G. $\frac{5}{6}ab + \frac{4}{5}ac - \frac{2}{3}cx = \frac{3}{4}ac + 2ab - 6cx$

A. $x = \frac{(70b-3c)a}{320c}$

24) 𝔊. $\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0$

𝔄. $x = \frac{ac(1 - 3ab)}{c - ad}$

25) 𝔊. $\frac{ace}{d} - \frac{(a+b)^2 x}{a} - bx = ac - 3bx$

𝔄. $x = \frac{a^2 e(c - d)}{(a^2 + b^2)d}$

26) 𝔊. $\frac{a + 3x}{4a} - \frac{7a - 5x}{6b} + 3 - \frac{9x}{4} = \frac{x}{ab} + \frac{5x}{6b}$

𝔄. $x = \frac{39ab - 14a^2}{27ab - 9b + 12}$

27) 𝔊. $5a^3cx + ac^2x - 5abc^2 - 3a^2c^2 = 5a^2bcx + bc^2x$
$- 3a^2bc^2 - 5a^2c^2$

𝔄. $x = \frac{3a^2c^2 - 5ac}{5a^2 + c}$

28) 𝔊. $2a^2b^2c + ab^2x - 2ab^3c - abc^2d - 3a^3x =$
$(b^3 - 3a^2b)x - b^2c^2d$

𝔄. $x = \frac{2ab^2c - bc^2d}{3a^2 - b^2}$

29) 𝔊. $\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}$

𝔄. $x = \frac{ab - 1}{bc + d}$

30) 𝔊. $\frac{3a + x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$

𝔄. $x = \frac{3a - 6}{4}$

31) 𝔊. $\frac{a^2x}{b - c} + dc = bx - ac$

𝔄. $x = \frac{c(a + d)(b - c)}{b(b - c) - a^2}$

2) G. $c = a + \frac{m(a-x)}{3a+x}$

A. $x = \frac{a(m-3c+3a)}{c-a+m}$

3) G. $\frac{a(d^2+x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}$

A. $x = \frac{d}{c}$

4) G. $\frac{cx^m}{a+bx} = \frac{fx^m}{d+ex}$

A. $x = \frac{cd-af}{bf-ce} = \frac{af-cd}{ce-bf}$

5) G. $\frac{7x^n}{x-1} = \frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1} - \frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}$

A. $x = -\frac{11}{12}$

6) G. $\frac{3a-5x}{a-c} + \frac{2a-x}{d} = \frac{a+f}{a-c} - dx$

A. $x = \frac{d(f-2a)-2a(a-c)}{(a-c)(d^2-1)-5d}$

7) G. $\frac{a}{bx} + \frac{c}{dx} + \frac{e}{fx} + \frac{g}{hx} = k$

A. $x = \frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfhk}$

8) G. $\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}$

A. $x = \frac{ab}{a+b}$

9) G. $\frac{bx}{2b-a} - \frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)} - \frac{5ab}{3c-d} = \frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}$

$- \frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$

A. $x = \frac{5a(2b-a)}{3c-d}$

40) G. $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$

A. $x=\frac{ac}{b}$

41) G. $\sqrt[m]{x}=a$

A. $x=a^m$

42) G. $\sqrt[m]{(ax+b)}=\sqrt[m]{(cx+d)}$

A. $x=\frac{d-b}{a-c}$

43) G. $h\sqrt[3]{(ax-b)}=k\sqrt[3]{(cx+dx-f)}$

A. $x=\frac{bh^3-fk^3}{ah^3-(c+d)k^3}$

44) G. $\sqrt[3]{(a^2+c)}=\sqrt[4]{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}$

A. $x=\frac{1}{d\sqrt[3]{(a^2+c)}}-g$

45) G. $\sqrt[m]{(a+x)}=\sqrt[2m]{(x^2+5ax+b^2)}$

A. $x=\frac{a^2-b^2}{3a}$

46) G. $c+b\sqrt[m]{(x+d)}=f$

A. $x=\left(\frac{f-c}{b}\right)^m-d$

47) G. $\frac{ax}{b}\sqrt{(f^2x^2+d^2)}+\frac{afx^2}{b}=cx$

A. $x=\frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf}=\frac{(bc+ad)(bc-ad)}{2abcf}$

Logarithmische Gleichungen.

48) G. $a^x = b$

A. $x = \frac{\log b}{\log a}$

49) G. $a^{mx} b^{nx} = c$

A. $x = \frac{\log c}{m \log a + n \log b} = \frac{\log c}{\log a^m b^n}$

50) G. $a^{mx+f} b^{nx+g} = c^{px+h} d^{qx+k}$

A. $x = \frac{h \log c + k \log d - f \log a - g \log b}{m \log a + n \log b - p \log c - q \log d} =$

$\left(\log \frac{c^h d^k}{a^f b^g}\right) : \left(\log \frac{a^m b^n}{c^p d^q}\right)$

51) G. $3^x = 177147$

A. $x = 11$

52) G. $2^x = 769$

A. $x = 9,586839 \ldots$

53) G. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\frac{1}{2}$

A. $x = -13,701172 \ldots$

54) G. $\left(\frac{756}{345}\right)^{\frac{3x}{2}} = 54783$

A. $x = 9,272299 \ldots$

55) G. $\left(\frac{21}{20}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}$

A. $x = 0,309928 \ldots$

56) G. $\left(\frac{295}{867}\right)^{3-x} = 632 \cdot \left(\frac{56}{39}\right)^{\frac{5x}{9}}$

A. $x = 11,040270 \ldots$

40) 𝔊. $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$

𝔄. $x=\frac{ac}{b}$

41) 𝔊. $\sqrt[m]{x}=a$

𝔄. $x=a^m$

42) 𝔊. $\sqrt[m]{(ax+b)}=\sqrt[m]{(cx+d)}$

𝔄. $x=\frac{d-b}{a-c}$

43) 𝔊. $h\sqrt[3]{(ax-b)}=k\sqrt[3]{(cx+dx-f)}$

𝔄. $x=\frac{bh^3-fk^3}{ah^3-(c+d)k^3}$

44) 𝔊. $\sqrt[3]{(a^2+c)}=\sqrt[4]{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}$

𝔄. $x=\frac{1}{d\sqrt[3]{(a^2+c)}}-g$

45) 𝔊. $\sqrt[m]{(a+x)}=\sqrt[2m]{(x^2+5ax+b^2)}$

𝔄. $x=\frac{a^2-b^2}{3a}$

46) 𝔊. $c+b\sqrt[m]{(x+d)}=f$

𝔄. $x=\left(\frac{f-c}{b}\right)^m-d$

47) 𝔊. $\frac{ax}{b}\sqrt{(f^2x^2+d^2)}+\frac{afx^2}{b}=cx$

𝔄. $x=\frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf}=\frac{(bc+ad)(bc-ad)}{2abcf}$

Logarithmische Gleichungen.

48) G. $a^x = b$

A. $x = \frac{\log b}{\log a}$

49) G. $a^{mx} b^{nx} = c$

A. $x = \frac{\log c}{m \log a + n \log b} = \frac{\log c}{\log a^m b^n}$

50) G. $a^{mx+f} b^{nx+g} = c^{px+h} d^{qx+k}$

A. $x = \frac{h \log c + k \log d - f \log a - g \log b}{m \log a + n \log b - p \log c - q \log d} = \left(\log \frac{c^h d^k}{a^f b^g}\right) : \left(\log \frac{a^m b^n}{c^p d^q}\right)$

51) G. $3^x = 177147$

A. $x = 11$

52) G. $2^x = 769$

A. $x = 9,586839 \ldots$

53) G. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\frac{1}{2}$

A. $x = -13,701172 \ldots$

54) G. $\left(\frac{756}{345}\right)^{\frac{3x}{2}} = 54783$

A. $x = 9,272299 \ldots$

55) G. $\left(\frac{21}{20}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}$

A. $x = 0,309928 \ldots$

56) G. $\left(\frac{295}{867}\right)^{3-x} = 632 \cdot \left(\frac{56}{39}\right)^{\frac{5x}{9}}$

A. $x = 11,040270 \ldots$

57) G. $3^{2x} \cdot 5^{6x-7} = 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}$

A. $x = 0{,}759965 \ldots$

b) Mit mehreren unbekannten Größen.

1) G. $\begin{Bmatrix} x+y = a \\ x-y = b \end{Bmatrix}$

A. $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$

2) G. $\begin{Bmatrix} 3x+2y = 118 \\ x+5y = 191 \end{Bmatrix}$

A. $x = 16$, $y = 35$

3) G. $\begin{Bmatrix} 7x+\frac{5}{2}y = 411\frac{1}{2} \\ 39x-14y = -935\frac{9}{10} \end{Bmatrix}$

A. $x = 17\frac{1}{2}$, $y = 115\frac{3}{5}$

4) G. $\begin{Bmatrix} 5x-8\frac{1}{2} = 7y-44 \\ 2x = y+\frac{5}{7} \end{Bmatrix}$

A. $x = 4\frac{1}{2}$, $y = 8\frac{2}{7}$

5) G. $\begin{Bmatrix} 5\frac{3}{4}y-11x = 4y+117\frac{1}{8} \\ 8x+175 = 2y \end{Bmatrix}$

A. $x = 9$, $y = 123\frac{1}{2}$

6) G. $\begin{Bmatrix} 7y = 2x-3y \\ 19x = 60y+612\frac{1}{4} \end{Bmatrix}$

A. $x = 88\frac{3}{4}$, $y = 17\frac{3}{4}$

7) G. $\begin{Bmatrix} 13x+7y-341 = 7\frac{1}{2}y+43\frac{1}{2}x \\ 2x+\frac{1}{2}y = 1 \end{Bmatrix}$

A. $x = -12$, $y = 50$

8) G. $\begin{Bmatrix} 113\frac{1}{2}x-27\frac{5}{7}y = 10y+5488\frac{4}{7} \\ 9y-347 = 5x-420 \end{Bmatrix}$

A. $x = 56$, $y = 23$

24) G. $\left\{\begin{array}{l} 2x-\frac{3}{4}y=93-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y \\ 7x-5z=y+x-86 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=58 \end{array}\right\}$

A. $x=48,\ y=54,\ z=64$

25) G. $\left\{\begin{array}{l} 3x-100=5y+360 \\ 2\frac{1}{3}x+200=16\frac{1}{2}z-610 \\ 2y+3z=548 \end{array}\right\}$

A. $x=360,\ y=124,\ z=100$

26) G. $\left\{\begin{array}{l} 4x+7y+159=0 \\ 3\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}z-55 \\ 2x+y+9z=498 \end{array}\right\}$

A. $x=-13\frac{1}{2},\ y=-15,\ z=60$

27) G. $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y-7z=-288 \\ 5x-y+3z=227 \\ 7x+6y+z=297 \end{array}\right\}$

A. $x=13,\ y=24,\ z=62$

28) G. $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ 8x+4y+2z=50 \\ 27x+9y+3z=64 \end{array}\right\}$

A. $x=\frac{2}{3},\ y=-7,\ z=36\frac{1}{3}$

29) G. $\left\{\begin{array}{l} 18x-7y-5z=11 \\ 4\frac{2}{5}y-\frac{2}{3}x+z=108 \\ 3\frac{1}{2}z+2y+\frac{3}{4}x=80 \end{array}\right\}$

A. $x=12,\ y=25,\ z=6$

30) G. $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=h \\ a'x+b'y+c'z=h' \\ a''x+b''y+c''z=h'' \end{array}\right\}$

A. $x=\frac{hb'c''-hb''c'+h'b''c-h'bc''+h''bc'-h''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$

$y=\frac{ah'c''-ah''c'+a'h''c-a'hc''+a''hc'-a''h'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$

$z=\frac{ab'h''-ab''h'+a'b''h-a'bh''+a''bh'-a''b'h}{ab'c''-ab''h'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$

17) G. $\begin{cases} x+y=10 \\ x+z=19 \\ y+z=23 \end{cases}$

A. $x=3,\ y=7,\ z=16$

18) G. $\begin{cases} x+y+z=29\frac{1}{4} \\ x+y-z=18\frac{1}{4} \\ x-y+z=13\frac{3}{4} \end{cases}$

A. $x=16,\ y=7\frac{3}{4},\ z=5\frac{1}{2}$

19) G. $\begin{cases} x+y+z=a \\ my=nx \\ pz=qx \end{cases}$

A. $x=\frac{amp}{mp+np+mq},\ y=\frac{anp}{mp+np+mq},$

$z=\frac{amq}{mp+np+mq}$

20) G. $\begin{cases} 3x+5y=161 \\ 7x+2z=209 \\ 2y+z=89 \end{cases}$

A. $x=17,\ y=22,\ z=45$

21) G. $\begin{cases} y+\frac{1}{2}x=41 \\ x+\frac{1}{4}z=20\frac{1}{2} \\ y+\frac{1}{5}z=34 \end{cases}$

A. $x=18,\ y=32,\ z=10$

22) G. $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \\ gy+hz=l \end{cases}$

A. $x=\frac{ce-bf}{ae-bd},\ y=\frac{af-cd}{ae-bd},\ z=\frac{a(el-fg)-d(bl-c}{h(ae-bd)}$

23) G. $\begin{cases} 53-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z=y-109 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y=26 \\ 5y=4z \end{cases}$

A. $x=64,\ y=80,\ z=100$

4) G. $\begin{cases} 2x-\frac{3}{4}y=93-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y \\ 7x-5z=y+x-86 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=58 \end{cases}$

A. $x=48,\ y=54,\ z=64$

5) G. $\begin{cases} 3x-100=5y+360 \\ 2\frac{1}{3}x+200=16\frac{1}{2}z-610 \\ 2y+3z=548 \end{cases}$

A. $x=360,\ y=124,\ z=100$

6) G. $\begin{cases} 4x+7y+159=0 \\ 3\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}z-55 \\ 2x+y+9z=498 \end{cases}$

A. $x=-13\frac{1}{2},\ y=-15,\ z=60$

7) G. $\begin{cases} 2x+5y-7z=-288 \\ 5x-y+3z=227 \\ 7x+6y+z=297 \end{cases}$

A. $x=13,\ y=24,\ z=62$

8) G. $\begin{cases} x+y+z=30 \\ 8x+4y+2z=50 \\ 27x+9y+3z=64 \end{cases}$

A. $x=\frac{2}{3},\ y=-7,\ z=36\frac{1}{3}$

9) G. $\begin{cases} 18x-7y-5z=11 \\ 4\frac{2}{5}y-\frac{2}{3}x+z=108 \\ 3\frac{1}{2}z+2y+\frac{3}{4}x=80 \end{cases}$

A. $x=12,\ y=25,\ z=6$

10) G. $\begin{cases} ax+by+cz=h \\ a'x+b'y+c'z=h' \\ a''x+b''y+c''z=h'' \end{cases}$

A. $x=\frac{hb'c''-hb''c'+h'b''c-h'bc''+h''bc'-h''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$

$y=\frac{ah'c''-ah''c'+a'h''c-a'hc''+a''hc'-a''h'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$

$z=\frac{ab'h''-ab''h'+a'b''h-a'bh''+a''bh'-a''b'h}{ab'c''-ab''h'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$

31) G. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c \end{cases}$

A. $x=\frac{2}{a+b-c}$, $y=\frac{2}{a-b+c}$, $z=\frac{2}{b+c-a}$

32) G. $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{5}{3y}+\frac{1}{z}=3\frac{4}{27} \\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=6\frac{11}{72} \\ \frac{5}{6x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}=12\frac{1}{36} \end{cases}$

A. $x=6$, $y=9$, $z=\frac{1}{3}$

33) G. $\begin{cases} \frac{2x+3y}{x+y}=2\frac{1}{5} \\ \frac{x+z}{5(x-z)}=\frac{1}{3} \\ \frac{10x-3z}{4x-2z}=2\frac{9}{14} \end{cases}$

A. $x=16$, $y=4$, $z=4$; u. a. m. (Unbestimmt)

34) G. $\begin{cases} ax+by=l \\ cx+du=m \\ ex+fz=n \\ gy+hz=p \end{cases}$

A. $x=\frac{bhn+(gl-bp)f}{beh+afg}$

$y=\frac{afp+(el-an)h}{beh+afg}$

$z=\frac{bep+(an-el)g}{beh+afg}$

$u=\frac{bh(em-cn)+gf(am-cl)+bcfp}{d(beh+afg)}$

) G. $\begin{cases} x - 9y + 3z - 10u = 21 \\ 2x + 7y - z - u = 683 \\ 3x + y + 5z + 2u = 195 \\ 4x - 6y - 2z - 9u = 516 \end{cases}$

A. $x = 100,\ y = 60,\ z = -13,\ u = -50$

) G. $\begin{cases} x + y + z + u = 1 \\ 16x + 8y + 4z + 2u = 9 \\ 81x + 27y + 9z + 3u = 36 \\ 256x + 64y + 16z + 4u = 100 \end{cases}$

A. $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{4},\ u = 0$

) G. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58 \\ \frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76 \\ \frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79 \\ y + z + u = 248 \end{cases}$

A. $x = 12,\ y = 30,\ z = 168,\ u = 50$

) G. $\begin{cases} \frac{xy}{ay + bx} = l \\ \frac{yz}{cz + dy} = m \\ \frac{xz}{ez + fx} = n \end{cases}$

A. $x = \frac{lmn(bde + acf)}{cfmn - bfln + bdlm}$

$y = \frac{lmn(bde + acf)}{afln + demn - adlm}$

$z = \frac{lmn(bde + acf)}{beln - cemn + aclm}$

39) G. $\begin{cases} x+y+z+t+u=a \\ x+y+z+u+w=b \\ x+y+z+t+w=c \\ x+y+u+t+w=d \\ x+z+u+t+w=e \\ y+z+u+t+w=f \end{cases}$

A. $x=\frac{s}{5}-f,\ y=\frac{s}{5}-e,\ z=\frac{s}{5}-d,$

$u=\frac{s}{5}-c,\ t=\frac{s}{5}-b,\ w=\frac{s}{5}-a$

($a+b+c+d+e+f=s$ gesetzt.)

---

3) Gleichungen vom zweiten Grade.

a) Mit einer unbekannten Größe.

Formel.

G. $x^2+Px=Q$

A. $x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}+Q\right)}$

Beispiele.

1) G. $ax^2=b$

A. $x=+\sqrt{\frac{b}{a}},\ x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$

2) G. $x^2+6x=27$

A. $x=3,\ x=-9$

3) G. $x^2-7x+3\frac{1}{4}=0$

A. $x=6\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2}$

4) G. $x^2-5\frac{3}{4}x=18$

A. $x=8,\ x=-2\frac{1}{4}$

5) G. $3x^2-2x=65$
A. $x=5$, $x=-4\frac{1}{3}$

6) G. $622x=15x^2+6384$
A. $x=22\frac{4}{5}$, $x=18\frac{2}{3}$

7) G. $20748-1616x+21x^2=0$
A. $x=60\frac{2}{3}$, $x=16\frac{4}{7}$

8) G. $9\frac{3}{5}x-21\frac{15}{16}=x^2$
A. $x=5\frac{17}{20}$, $x=3\frac{3}{4}$

9) G. $11\frac{3}{4}x-3\frac{1}{2}x^2=-41\frac{1}{4}$
A. $x=-2\frac{1}{7}$, $x=5\frac{1}{2}$

10) G. $9\frac{1}{3}x^2-90\frac{1}{3}x+195=0$
A. $x=6\frac{3}{7}$, $x=3\frac{1}{4}$

11) G. $\frac{18x^2}{5}+\frac{18078x}{65}+4728=0$
A. $x=-25\frac{10}{39}$, $x=-52$

12) G. $x^2-8x=14$
A. $x=4+\sqrt{30}$, $x=4-\sqrt{30}$
oder $x=9{,}4772\cdots$, $x=-1{,}4772\cdots$

13) G. $3x^2+x=7$
A. $x=\frac{-1+\sqrt{85}}{6}$, $x=\frac{-1-\sqrt{85}}{6}$
oder $x=1{,}3699\cdots$, $x=-1{,}7032\cdots$

14) G. $118x-2\frac{1}{2}x^2=20$
A. $x=\frac{118+\sqrt{13724}}{5}$, $x=\frac{118-\sqrt{13724}}{5}$
oder $x=47{,}0298\cdots$, $x=0{,}1701\cdots$

15) G. $6x-30=3x^2$
A. $x=1+\sqrt{-9}$, $x=1-\sqrt{-9}$

16) G. $8x^2-7x+34=0$

A. $x=\frac{7+\sqrt{-1039}}{16}$, $x=\frac{7-\sqrt{-1039}}{16}$

17) G. $4x^2-9x=5x^2-255\frac{3}{4}-8x$

A. $x=15\frac{1}{2}$, $x=-16\frac{1}{2}$

18) G. $80x+\frac{3x^2}{4}+\frac{21x-27782}{12}=1859\frac{1}{3}-3x^2$

A. $x=-46$, $x=24\frac{1}{5}$

19) G. $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$

A. $x=14$, $x=-10$

20) G. $\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x}=13$

A. $x=9$, $x=1\frac{2}{13}$

21) G. $\frac{8x}{x+2}-6=\frac{20}{3x}$

A. $x=10$, $x=-\frac{2}{3}$

22) G. $\frac{48}{x+3}=\frac{165}{x+10}-5$

A. $x=5\frac{2}{5}$, $x=5$

23) G. $\frac{31}{6x}=\frac{16}{117-2x}+1$

A. $x=67\frac{1}{6}$, $x=4\frac{1}{2}$

24) G. $\frac{2x+3}{10-x}=\frac{2x}{25-3x}-6\frac{1}{2}$

A. $x=13\frac{22}{31}$, $x=8$

25) G. $\frac{25x+180}{10x-81}=\frac{40x}{5x-8}-\frac{3}{5}$

A. $x=14\frac{3}{5}$, $x=\frac{72}{245}$

26) 𝔊. $\frac{18+x}{6(3-x)}=\frac{20x+9}{19-7x}-\frac{65}{4(3-x)}$

𝔄. $x=7\frac{22}{113}$, $x=2\frac{1}{2}$

27) 𝔊. $adx-acx^2=bcx-bd$.

𝔄. $x=\frac{d}{c}$, $x=-\frac{b}{a}$.

28) 𝔊. $\frac{a^2x^2}{f^2}-\frac{2ax}{g}+\frac{f^2}{g^2}=0$

𝔄. $x=\frac{f^2}{ag}$, $x=\frac{f^2}{ag}$

29) 𝔊. $abx^2+\frac{3a^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{b^2x}{c}$

𝔄. $x=\frac{2a-b}{ac}$, $x=-\frac{3a+2b}{bc}$

30) 𝔊. $\frac{2c^2}{d^2}+\frac{ac}{d}-(a-b)(2c+ad)\frac{x}{d}=(a+b)\frac{cx}{d}$
$-(a^2-b^2)x^2$

𝔄. $x=\frac{2c+ad}{d(a+b)}$, $x=\frac{c}{d(a-b)}$

31) 𝔊. $32a^{2m}c^{n-1}+4a^{m+3}c^{n-1}(ac^3-2)x=a^7c^{n+2}x^2$

𝔄. $x=4a^{m-3}$, $x=-\frac{8a^{m-4}}{c^3}$

32) 𝔊. $cx+\frac{ac}{a+b}=(a+b)x^2$

𝔄. $x=\frac{c+\sqrt{(c^2+4ac)}}{2(a+b)}$, $x=\frac{c-\sqrt{(c^2+4ac)}}{2(a+b)}$.

33) 𝔊. $9a^4b^4x^2-6a^3b^2x-b^2=0$

𝔄. $x=\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{3a^2b^2}$, $x=\frac{a-\sqrt{(a^2+b^2)}}{3a^2b^2}$

34) 𝔊. $abx^2-2x(a+b)\sqrt{ab}=(a-b)^2$

𝔄. $x=\frac{a+b\pm\sqrt{(2a^2+2b^2)}}{\sqrt{ab}}$

35) G. $ax^2+b^2+c^2=a^2+2bc+2(b-c)x\sqrt{a}$

A. $x=\frac{b-c+a}{\sqrt{a}}$, $x=\frac{b-c-a}{\sqrt{a}}$

36) G. $cx^2-2cx\sqrt{d}=dx^2-cd$

A. $x=\frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, $x=\frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$

37) G. $(4a^2-9cd^2)x^2+(4a^2c^2+4abd^2)x+(ac^2+bd^2)^2=0$

A. $x=-\frac{ac^2+bd^2}{2a+3d\sqrt{c}}$, $x=-\frac{ac^2+bd^2}{2a-3d\sqrt{c}}$

38) G. $ab^3x^2+(1+c)bd\sqrt{c}+cb^2x^2=[b^3d\sqrt{c}+(ab+c)(1+c)]x$

A. $x=\frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}$, $x=\frac{1+c}{b^2}$

39) G. $\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2-\left(\frac{5\sqrt{(a+b)}}{3b^3}+\frac{(1+2b^2)cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right)x+\frac{cd}{ab}\sqrt{(a+b)c}=0$

A. $x=\frac{(3-a^2)\sqrt{(a+b)}}{ab(1+2b^2)}$, $x=\frac{3b^2cd\sqrt{c}}{5a}$

40) G. $ax=b+\sqrt{cx}$

A. $x=\frac{2ab+c+\sqrt{(4abc+c^2)}}{2a^2}$. *)

41) G. $3\sqrt{(112-8x)}=19+\sqrt{(3x+7)}$

A. $x=6$

---

*) Nur dieser eine Werth des x darf hier gebraucht werden, der andere gilt für die Gleichung $ax=b-\sqrt{cx}$; denn diese und die gegebene führen zu der nämlichen Endgleichung $a^2x^2-(2ab+c)x+b^2=0$. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den Gleichungen 41, 42, 43, 44.

8) G. $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = h \\ (x+y+a)^2 + (x-y+a)^2 = k \end{array}\right\}$

A. $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{(2h+k-a^2)}}{2}$

$y = \pm \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}k - h \mp a\sqrt{(2h+k-a^2)}}{2}}$

9) G. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{18x}{y} = \dfrac{8y}{x} \\ 3xy + 2x + y = 485 \end{array}\right\}$

A. $x = 10, \quad y = 15$

oder $x = -10\frac{7}{9}, \quad y = -16\frac{1}{6}$ *)

10) G. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{ax}{y} = \dfrac{by}{x} \\ cxy + dx + ey = h \end{array}\right\}$

**)
A. $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}} \end{array}\right\}$

od. $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{-(e\sqrt{a}-d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{+(e\sqrt{a}-d\sqrt{b}) \mp \sqrt{[(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}} \end{array}\right\}$

---

*) Diese Gleichungen lassen noch zwei Auflösungen zu, nämlich
$x = \dfrac{1+\sqrt{-34919}}{18}, \quad y = \dfrac{-1-\sqrt{-34919}}{12}$, und
$x = \dfrac{1-\sqrt{-34919}}{18}, \quad y = \dfrac{-1+\sqrt{-34919}}{12}$,
welche aber, wie man sieht, imaginär sind.

**) Diese Gleichungen geben daher vier Paar zusammengehörige Werthe von x und y.

3) G. $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$

A. $x = \frac{a + \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$, $y = \frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$

oder $x = \frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$, $y = \frac{a + \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$

4) G. $\begin{cases} xy = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$

A. $x = \pm\sqrt{\frac{b + \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$

$y = \pm\sqrt{\frac{b - \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$

oder $x = \pm\sqrt{\frac{b - \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$

$y = \pm\sqrt{\frac{b + \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$

5) G. $\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b \end{cases}$

A. $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}$, $y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}$

oder $x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}$, $y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}$

6) G. $\begin{cases} 2x + 3y = 118 \\ 5x^2 - 7y^2 = 4333 \end{cases}$

A. $x = 35$, $y = 16$

oder $x = -229\frac{6}{17}$, $y = 192\frac{4}{17}$

7) G. $\begin{cases} ax + by = h \\ cx^2 + dy^2 = k \end{cases}$

A. $x = \frac{adh \pm b\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$

$y = \frac{bch \mp a\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$

8) G. $\begin{cases} x^2 - y^2 = h \\ (x+y+a)^2 + (x-y+a)^2 = k \end{cases}$

A. $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{(2h+k-a^2)}}{2}$

$y = \pm \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}k - h \mp a\sqrt{(2h+k-a^2)}}{2}}$

9) G. $\begin{cases} \dfrac{18x}{y} = \dfrac{8y}{x} \\ 3xy + 2x + y = 485 \end{cases}$

A. $x = 10, \quad y = 15$

oder $x = -10\frac{7}{9}, \quad y = -16\frac{1}{6}$ *)

10) G. $\begin{cases} \dfrac{ax}{y} = \dfrac{by}{x} \\ cxy + dx + ey = h \end{cases}$

**) A. $\begin{cases} x = \dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}} \end{cases}$

od. $\begin{cases} x = \dfrac{-(e\sqrt{a}-d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{+(e\sqrt{a}-d\sqrt{b}) \mp \sqrt{[(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}} \end{cases}$

---

*) Diese Gleichungen lassen noch zwei Auflösungen zu, nämlich $x = \dfrac{1+\sqrt{-34919}}{18}$, $y = \dfrac{-1-\sqrt{-34919}}{12}$, und $x = \dfrac{1-\sqrt{-34919}}{18}$, $y = \dfrac{-1+\sqrt{-34919}}{12}$, welche aber, wie man sieht, imaginär sind.

**) Diese Gleichungen geben daher vier Paar zusammengehörige Werthe von x und y.

11) G. $\left\{\begin{array}{l} x+y+x^2+y^2 = a \\ x-y+x^2-y^2 = b \end{array}\right\}$

A. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+2b+1)}}{2}$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a-2b+1)}}{2}$

oder $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+2b+1)}}{2}$

$y = \frac{-1 \mp \sqrt{(2a-2b+1)}}{2}$ *)

12) G. $\left\{\begin{array}{l} x+y = xy \\ x+y+x^2+y^2 = a \end{array}\right\}$

A. $x = \frac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} + \sqrt{[4a-6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4}$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} - \sqrt{[4a-6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4}$ **)

13) G. $\left\{\begin{array}{l} ax-by = g \\ a^3x^3-b^3y^3 = hxy \end{array}\right\}$

A. $x = \frac{g}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$,

$y = \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$

14) G. $\left\{\begin{array}{l} (x-y)(x^2-y^2) = a \\ (x+y)(x^2+y^2) = b \end{array}\right\}$

A. $x = \frac{\sqrt[6]{(2b-a)} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$, $y = \frac{\sqrt[6]{(2b-a)} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$

---

*) Diese Gleichungen geben also ebenfalls vier Paar zusammengehörige Werthe von x und y.

**) Die Werthe von x und y können auch mit einander vertauscht werden.

5) G. $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a \\ y^2=2xz+b \\ cx=dz \end{array}\right\}$

A. $x=\frac{d\sqrt{(a-b)}}{c+d}$, $y=\frac{\sqrt{[2acd+b(c^2+d^2)]}}{c+d}$

$$z=\frac{c\sqrt{(a-b)}}{c+d}$$

6) G. $\left\{\begin{array}{l} x(y+z)=a \\ y(x+z)=b \\ z(x+y)=c \end{array}\right\}$

A. $x=\pm\sqrt{\frac{(a-c+b)(a-b+c)}{2(c-a+b)}}$

$$y=\pm\sqrt{\frac{(a-c+b)(c-a+b)}{2(a-b+c)}}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(c-a+b)(a-b+c)}{2(a-c+b)}}$$

7) G. $\left\{\begin{array}{l} \frac{xyz}{x+y}=a \\ \frac{xyz}{y+z}=b \\ \frac{xyz}{x+z}=c \end{array}\right\}$.

A. $x=\pm\sqrt{\frac{2abc(ab-ac+bc)}{(ab+ac-bc)(bc+ac-ab)}}$

$$y=\pm\sqrt{\frac{2abc(bc+ac-ab)}{(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)}}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{2abc(ab+ac-bc)}{(ab-ac+bc)(bc+ac-ab)}}$$

8) G. $\left\{\begin{array}{l} xy=p \\ (b-y)z=p' \\ (a-x)(c-z)=p'' \end{array}\right\}$

A. $x = \frac{-A \pm \sqrt{[A^2 - 4p(p' - bc)(p'' - ac)]}}{2(p' - bc)}$

$y = \frac{-A \mp \sqrt{[A^2 - 4p(p' - bc)(p'' - ac)]}}{2(p'' - ac)}$

$z = \frac{-B \mp \sqrt{[B^2 - 4p'(p - ab)(p'' - ac)]}}{2(p - ab)}$

($cp - ap' - bp'' + abc = A$, $cp - ap' + bp'' - abc = B$ gesetzt.)

19) G. $\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = k \\ ax + a'y + a''z = 0 \\ bx + b'y + b''z = 0 \end{matrix}\right\}$

A. $x = (a'b'' - a''b')A$, $y = (a''b - ab'')A$,
$z = (ab' - a'b)A$

$\pm\sqrt{\frac{k}{(ab' - a'b)^2 + (a'b'' - a''b')^2 + (a''b - ab'')^2}} = A$ gesetzt.

20) G. $\left\{\begin{matrix} axy + bx + cy + d = 0 \\ a'yz + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''zx + b''z + c''x + d'' = 0 \end{matrix}\right\}$

A. Die Eliminirung von y und z führt auf die Gleichung des zweiten Grades:

$$(a''x + b'')[(bb' - ad')x + b'd - cd'] + (c''x + d'')[(ac' - a'b)x + cc' - a'd] = 0$$

Ist hieraus x bestimmt, so hat man auch y und z. (Die letzten beiden Arten von Gleichungen findet man S. 150 zu größerer Allgemeinheit erhoben.)

4) Auflösung der Gleichungen von höheren Graden.

a) Die Cardanische Formel.

G. $x^3 = Px + Q$

A. $x = \sqrt[3]{\frac{Q + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{Q - \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}$

Beispiele.

1) G. $x^3 - 3x - 2 = 0$
   A. $x = 2$

2) G. $x^3 + 12x + 63 = 0$
   A. $x = -3$

3) G. $x^3 - 21x + 344 = 0$
   A. $x = -8$

4) G. $x^3 - 6x - 40 = 0$
   A. $x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})} =$
   $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 4$

5) G. $x^3 + 3x - 14 = 0$
   A. $x = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt{50})} =$
   $\sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} = 2$

6) G. $x^3 - \frac{15}{2}x + 290\frac{1}{2} = 0$
   A. $x = \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$
   $= \sqrt[3]{\left(\frac{-7 + \sqrt{39}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-7 - \sqrt{39}}{7}\right)^3} = -7$

7) G. $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$
   A. $x = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3,36216 \cdots$

8) G. $x^3-12x-28=0$

A. $x=\sqrt[3]{(14+\sqrt{132})}+\sqrt[3]{(14-\sqrt{132})}=4,30213\ldots$

9) G. $x^3+6x^2+20x+15=0$

A. $x=-2+\sqrt[3]{\frac{81+\sqrt{12705}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{81-\sqrt{12705}}{18}}$

$=-2+\sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{105}}{6}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{105}}{6}\right)^3}=-1$

10) G. $x^3-15x^2+71x-297=0$

A. $x=5+\sqrt[3]{\frac{864+\sqrt{746304}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{864-\sqrt{746304}}{9}}$

$=5+\sqrt[3]{\left(\frac{9+\sqrt{69}}{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{9-\sqrt{69}}{3}\right)^3}=11$

11) G. $x^3-12x^2+36x-7=0$

A. $x=4+\sqrt[3]{\frac{-9+\sqrt{-175}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-9-\sqrt{-175}}{2}}$

$=4+\sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{-7}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{-7}}{2}\right)^3}=7$

b) Durch das Aufsuchen ihrer rationalen Wurzeln. *)

1) G. $x^3-9x^2+26x-24=0$

W. 2, 3, 4

2) G. $x^3-8x^2+5x+14=0$

W. -1, 2, 7

3) G. $x^3-49x-120=0$

W. -3, -5, 8

4) G. $x^3-18x^2+87x-110=0$

W. 2, 5, 11

---

*) W. bezeichnet Wurzeln der Gleichung.

5) G. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
W. $1, 2, 3, 4$

6) G. $x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0$
W. $1, -2, -6, 7$

7) G. $x^4 + 29x^3 + 287x^2 + 1147x + 1560 = 0$
W. $-3, -5, -8, -13$

8) G. $x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{79}{8}x + \frac{15}{4} = 0$
W. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -6$

9) G. $x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0$
W. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

10) G. $x^3 - \frac{14}{3}x^2 + 7x - \frac{10}{3} = 0$
W. $1, \frac{5}{3}, 2$

11) G. $x^3 + \frac{8}{5}x^2 + \frac{9}{100}x - \frac{9}{100} = 0$
W. $\frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{3}{2}$

12) G. $x^3 - \frac{39}{28}x^2 + \frac{31}{56}x - \frac{3}{56} = 0$
W. $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{4}$

13) G. $x^3 - \frac{139}{24}x^2 + \frac{329}{48}x + \frac{55}{16} = 0$
W. $-\frac{3}{8}, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}$

14) G. $x^3 + \frac{82}{15}x^2 - \frac{173}{5}x - \frac{126}{5} = 0$
W. $-\frac{2}{3}, \frac{21}{5}, -9$

15) G. $x^4 - \frac{19}{4}x^3 + \frac{49}{8}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{8} = 0$
W. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 3$

16) G. $x^4 - \frac{41}{8}x^3 + \frac{287}{32}x^2 - \frac{398}{64}x + \frac{45}{32} = 0$
W. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{8}, 2$

17) G. $x^3 - 14x^2 - 5x + 70 = 0$
W. $14, +\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

18) G. $x^3 - 13x^2 + 49x - 45 = 0$
W. $5,\ 4+\sqrt{7},\ 4-\sqrt{7}$

19) G. $x^3 - 13x^2 + 38x + 16 = 0$
W. $8,\ \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33},\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33}$

20) G. $x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0$
W. $4,\ 1+\sqrt{-10},\ 1-\sqrt{-10}$

21) G. $x^3 + \frac{7}{6}x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{21}{2} = 0$
W. $-\frac{3}{2},\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{-251},\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{-251}$

22) G. $x^4 + x^3 - 24x^2 + 43x - 21 = 0$
W. $1,\ 3,\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{53},\ -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{53}$

23) G. $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$
W. $3,\ 3,\ -3,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$

24) G. $x^5 - \frac{3}{2}x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 13x + 19\frac{1}{2} = 0$
W. $\frac{3}{2},\ +\sqrt{(3+\sqrt{22})},\ -\sqrt{(3+\sqrt{22})},$
$+\sqrt{(3-\sqrt{22})},\ -\sqrt{(3-\sqrt{22})}$

---

5) Ein Paar allgemeine Fälle, wo sich die Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen leicht auflösen lassen.

I. Es mögen $x', x'', x''', \ldots\ldots x^n$, n unbekannte Größen bezeichnen. Hat man nun eine Gleichung von der Form

$$a'x'^m + a''x''^m + a'''x'''^m + a''''x''''^m + \cdots\cdots + a^{n'}(x^{n'})^m = K$$

und sind noch überdies $n-1$ Gleichungen von nachstehender Form gegeben, worin die unbekannten Größen den ersten Grad nicht übersteigen:

$$b'x' + b''x'' + b'''x''' + b''''x'''' + \cdots\cdots + b^{n'}x^{n'} = 0$$
$$c'x' + c''x'' + c'''x''' + c''''x'''' + \cdots\cdots + c^{n'}x^{n'} = 0$$
$$d'x' + d''x'' + d'''x''' + d''''x'''' + \cdots\cdots + d^{n'}x^{n'} = 0$$

u. s. w.

so wird man, durch die Auflösung dieser letztern Gleichungen, alle unbekannten Größen durch eine derselben ausdrükken können, und zwar wie folgt: $x'' = A''x'$, $x''' = A'''x'$, $x'''' = A''''x', \cdots\cdots x^{n'} = A^{n'}x'$, wo A'', A''', A'''', $\cdots\cdots A^{n'}$ bekannte Größen seyn werden. Diese Werthe in der ersten Gleichung substituirt, geben:

$$x' = \sqrt[m]{\frac{K}{a' + a''A''^m + a'''A'''^m + a''''A''''^m \cdots + a^{n'}(A^{n'})^m}}$$

woraus sich ferner die Werthe von x'', $x''' \cdots x^{n'}$ ergeben. Die Sache läßt sich noch weit allgemeiner machen; wird dem eigenen Nachdenken des Lesers überlassen.

II. Es seyen nachstehende n in sich selbst wiederkehrende Gleichungen zwischen den n unbekannten Größen x', x'', $x''' \cdots x^{n'}$, gegeben:

$$a'x'x'' + b'x' + c'x'' + d' = 0$$
$$a''x''x''' + b''x'' + c''x''' + d'' = 0$$
$$a'''x'''x'''' + b'''x''' + c'''x'''' + d''' = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{(n-1)'}x^{(n-1)'}x^{n'} + b^{(n-1)'}x^{(n-1)'} + c^{(n-1)'}x^{n'} + d^{(n-1)'} = 0$$
$$a^{n'}x^{n'}x' + b^{n'}x^{n'} + c^{n'}x' + d^{n'} = 0.$$

Man bestimme aus der ersten den Werth von x'' durch x', substituire diesen Werth von x'' in der zweiten, und bestimme x''' ebenfalls durch x', u. s. w.; so wird man am Ende $x^{n'}$ durch x' ausgedrückt erhalten, und zwar in nachstehender Form: $x^{n'} = \frac{Ax' + B}{Cx' + D}$. Wird dieser Werth in der letzten Gleichung substituirt, so erhält man eine Glei-

chung des zweiten Grades für x'. Diese giebt den Werth von x' und somit auch den Werth der übrigen unbekannten Größen.

....

Sind die Wurzeln einer Gleichung gegeben, so läßt sich die Gleichung selbst finden: auf welche Weise? Was für eine Gleichung hat z. B. die Wurzeln 1, 3, — 1, — 4? Was für eine die Wurzeln 6, $2+3\sqrt{-1}$, $2-3\sqrt{-1}$? — Die Coefficienten einer Gleichung stehen also mit den Wurzeln derselben in einer gewissen Verbindung: in welcher? — Wenn die drei Gleichungen I. $x+y+z=a$, II. $xy+xz+yz=b$, III. $xyz=c$, oder die vier Gleichungen I. $x+y+z+w=a$, II. $xy+xz+xw+yz+yw+zw=b$, III. $xyz+xyw+xzw+yzw=c$, IV. $xyzw=d$ gegeben sind, so läßt sich im ersten Falle eine Gleichung vom dritten, im zweiten Falle eine Gleichung vom vierten Grade finden, welche die sämmtlichen unbekannten Größen zugleich giebt: wie wird diese Gleichung gebildet? — Sind schon m Wurzeln einer Gleichung des $n$ten Grades bekannt, so erfordert die Bestimmung der übrigen nur noch die Auflösung einer Gleichung des $(n-m)$ten Grades: wie wird diese Gleichung gefunden? — Wenn der Grad einer Gleichung durch eine ungerade Zahl angegeben wird, so hat sie nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel: warum? — Wenn $h+k\sqrt{-1}$ irgend eine imaginäre Wurzel einer Gleichung ist, so muß auch $h-k\sqrt{-1}$ eine Wurzel derselben seyn: wie läßt sich dieses erweisen? — Vorausgesetzt, wie sich streng erweisen läßt, daß alle imaginären Größen sich auf die Form $h+k\sqrt{-1}$ bringen lassen: wie viele imaginäre, und wie viele reelle Wurzeln kann eine Gleichung vom $n$ten Grade haben, nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist? — Wenn die Car-

danische Formel ein imaginäres Resultat giebt: hat alsdann die Gleichung wirklich keine reelle Wurzel? Oder soll dies hier bloß anzeigen, daß die Form, welche man der Wurzel aufdringen wollte, unmöglich ist?

XIV. Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

1) Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Erste Methode.

Es sey $X=0$ irgend eine Gleichung für die unbekannte Größe x. Es sey ferner w ein durch Versuche gefundener Werth des x, welcher von dem wahren Werthe desselben um weniger als die Einheit abweicht. Setzt man daher $w+h$ für x in jener Gleichung, so muß nothwendig, bei genauer Bestimmung, $h<1$ werden. Behält man daher bei der Entwicklung nur die erste Potenz von h, und läßt vorerst die höheren Potenzen desselben als weniger bedeutend außer Acht, so verwandelt sich die Gleichung $X=0$ in eine andere von der Form $A+Bh=0$, worin A, B, gegebene Größen sind. Hieraus erhält man nun h, und mithin auch $x=w+h$, wenigstens näherungsweise. Mit diesem neuen Werthe des x kann man nun wieder eben so verfahren, wie vorhin mit w, und durch Wiederholung dieser Verrichtung dem wahren Werthe des x immer näher und näher kommen.

Durch die Anwendung dieses Prinzips auf die allgemeine Gleichung:

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}+\ldots\ldots+hx^2+kx+l=0$$

erhält man nachstehenden Ausdruck für den jedesmaligen Näherungswerth:

$$\frac{(m-1)w^m+(m-2)aw^{m-1}+(m-3)bw^{m-2}+\cdots+1hw^2-l}{mw^{m-1}+(m-1)aw^{m-2}+(m-2)bw^{m-3}+\cdots+2hw+k}$$

Für die Gleichung vom dritten Grade $x^3+ax^2+bx+c=0$ ist daher

$$x=\frac{2w^3+aw^2-c}{3w^2+2aw+b}$$

Für die Gleichung vom vierten Grade $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ ist

$$x=\frac{3w^4+2aw^3+bw^2-d}{4w^3+3aw^2+2bw+c}$$

Für die Gleichung vom fünften Grade $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ist

$$x=\frac{4w^5+3aw^4+2bw^3+cw^2-e}{5w^4+4aw^3+3bw^2+2cw+d}$$

u. s. w.

Beispiele.

1) G. $x^3=2$
$w=1$, $w'=\frac{4}{3}$, $w''=\frac{91}{72}$, $w'''=\frac{2253638}{1788696}$, u. s. w. *)

2) G. $x^3=30$
$w=3$, $w'=\frac{28}{9}$, $w''=\frac{65774}{21168}$, u. s. w.

3) G. $x^3-12x^2+57x-94=0$
$w=3$, $w'=\frac{10}{3}$, $w''=\frac{938}{279}$, u. s. w.

---

*) w, w', w'', u. s. w. bezeichnen die successiven Näherungswerthe des x. Es wird hier nur immer eine Wurzel berechnet. Für die andern Wurzeln, wenn sie möglich sind, läßt sich das nämliche Verfahren anwenden.

4) G. $x^3-15^2+72x-109=0$
$w=5$, $w'=\frac{16}{3}$, $w''=\frac{385}{72}$, u. s. w.

5) G. $x^3-13x^2+38x+17=0$
$w=0$, $w'=\frac{175}{22}$, $w''=\frac{1778984}{223674}$, u. s. w.

6) G. $x^3+2x^2+3x-52=0$
$w=3$, $w'=\frac{62}{21}$, $w''=\frac{1119676}{379328}$, u. s. w.

7) G. $x^3-12x-132=0$
$w=6$, $w'=\frac{47}{8}$, $w''=\frac{137615}{23436}$, u. s. w.

8) G. $x^4-4x^3+18=0$
$w=2$, $w'=\frac{17}{8}$, $w''=\frac{137597}{64736}$, u. s. w.

9) G. $x^4+8x^2+16x-440=0$
$w=4$, $w'=\frac{167}{42}$, $w''=\frac{4096104771}{1030204056}$, u. s. w.

Um weiter zu rechnen ist es rathsam, den für w'' gefundenen Bruch etwa bis auf drei Decimalstellen zu entwickeln, weil es sich wohl nur selten ereignen möchte, daß schon die dritte Annäherung die Wurzel genauer giebt.

Zweite Methode.

Es sey $X=0$ die gegebene Gleichung in x: man soll irgend eine ihrer Wurzeln mit Hülfe der Kettenbrüche entwickeln. Nach dem allgemeinen Prinzip in VIII. S. 113 verfahre man alsdann wie folgt.

Man setze $a+\frac{1}{x'}$ für x, und es verwandele sich dadurch die Gleichung $X=0$ in eine $X'=0$ für x'. Es seyen a' und $a'+1$ die beiden ganzen Zahlen, zwischen welche eine Wurzel dieser Gleichung fällt; man setze $a'+\frac{1}{x''}$ für x', und verwandele dadurch die Gleichung $X'=0$, in eine andere $X''=0$ für x''. Wenn alsdann

eine Wurzel dieser letztern Gleichung zwischen a'' und $a''+1$ fällt, so werde wieder $a''+\frac{1}{x'''}$ für x'' gesetzt, und auf diese Weise mit der Rechnung weiter fortgefahren. Man erhält alsdann die Wurzel x der gegebenen Gleichung durch einen Kettenbruch ausgedrückt, nämlich

$$x = a + \frac{1}{x'} = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{x''}} = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \text{rc.}}}$$

Wird hierauf dieser Kettenbruch in seine Näherungsbrüche aufgelöst, so erhält man die Näherungswerthe derjenigen Wurzel der gegebenen Gleichung, welche gesucht wird.

Beispiele.

1) $x^3 - 2 = 0$

....

$X = x^3 - 2 = 0$	$x = 1 + \frac{1}{x'}$
$X' = x'^3 - 3x'^2 - 3x' - 1 = 0$	$x' = 3 + \frac{1}{x''}$
$X'' = 10x''^3 - 6x''^2 - 6x'' - 1 = 0$	$x'' = 1 + \frac{1}{x'''}$
$X''' = 3x'''^3 - 12x'''^2 - 24x''' - 10 = 0$	$x''' = 5 + \frac{1}{x^{IV}}$
$X^{IV} = 55x^{IV3} - 81x^{IV2} - 33x^{IV} - 3 = 0$	$x^{IV} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$
$X^{V} = 62x^{V3} + 30x^{V2} - 84x^{V} - 55 = 0$	$x^{V} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$
u. s. w.	

Näherungswerthe : $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{29}{23}, \frac{34}{27}, \frac{63}{50}$, rc.

Wahre Wurzel : 1,25992......

2) $x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$

....

$= x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$	$x = 1 + \frac{1}{x'}$
$= x'^3 - 36x'^2 + 12x' - 1 = 0$	$x' = 35 + \frac{1}{x''}$
$= 806x''^3 - 1167x''^2 - 69x'' - 1 = 0$	$x'' = 1 + \frac{1}{x'''}$
$= 431x'''^3 - 15x'''^2 - 1251x''' - 806 = 0$	$x''' = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$

u. s. w.

Näherungswerthe: 1, $\frac{36}{35}$, $\frac{37}{36}$, $\frac{73}{71}$, etc.

Wahre Wurzel: 1,02803 .....

3) $x^3 - 12x^2 + 45x - 53 = 0$

....

$= x^3 - 12x^2 + 45x - 53 = 0$	$x = 5 + \frac{1}{x'}$
$= 3x'^3 - 3x' - 1 = 0$	$x' = 1 + \frac{1}{x''}$
$= x''^3 - 6x''^2 - 9x'' - 3 = 0$	$x'' = 7 + \frac{1}{x'''}$
$= 17x'''^3 - 54x'''^2 - 15x''' - 1 = 0$	$x''' = 3 + \frac{1}{x^{IV}}$
$= 73x^{IV3} - 120x^{IV2} - 99x^{IV} - 17 = 0$	$x^{IV} = 2 + \frac{1}{x^{V}}$
$= 111x^{V3} - 297x^{V2} - 318x^{V} - 73 = 0$	$x^{V} = 3 + \frac{1}{x^{VI}}$
$= 703x^{VI3} - 579x^{VI2} - 702x^{VI} - 111 = 0$	$x^{VI} = 1 + \frac{1}{x^{VII}}$

u. s. w.

Näherungswerthe: 5, 6, $\frac{47}{8}$, $\frac{147}{25}$, $\frac{341}{58}$, $\frac{1170}{199}$, $\frac{1511}{257}$, etc.

Wahre Wurzel: 5, 879385 .....

4) $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$

. . . .

$X = x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$	$x = 3 + \frac{1}{x'}$
$X' = 4x'^3 - 12x'^2 + 3x' - 1 = 0$	$x' = 3 - \frac{1}{x''}$
$X'' = 8x''^3 - 39x''^2 + 24x'' - 4 = 0$	$x'' = 4 + \frac{1}{x'''}$
$X''' = 20x'''^3 - 96x'''^2 - 57x''' - 8 = 0$	$x''' = 5 + \frac{1}{x^{IV}}$
$X^{IV} = 193x^{IV3} - 483x^{IV2} - 204x^{IV} - 20 = 0$	$x^{IV} = 3 - \frac{1}{x^{V}}$
u. s. w.	

Näherungswerthe : 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{37}{11}$, $\frac{195}{58}$, $\frac{622}{185}$, ꝛc.

Wahre Wurzel : 3,36216 . . . . .

5) $x^3 - 12x - 28 = 0$

. . . .

$X = x^3 - 12x - 28 = 0$	$x = 4 + \frac{1}{x'}$
$X' = 12x'^3 - 36x'^2 - 12x' - 1 = 0$	$x' = 3 + \frac{1}{x''}$
$X'' = 37x''^3 - 96x''^2 - 72x'' - 12 = 0$	$x'' = 3 + \frac{1}{x'''}$
$X''' = 93x'''^3 - 351x'''^2 - 237x'' - 37 = 0$	$x''' = 4 + \frac{1}{x^{IV}}$
$X^{IV} = 649x^{IV3} - 1419x^{IV2} - 765x^{IV} - 93 = 0$	$x^{IV} = 3 - \frac{1}{x^{V}}$
u. s. w.	

Näherungswerthe : 4, $\frac{13}{3}$, $\frac{43}{10}$, $\frac{185}{43}$, $\frac{598}{139}$, ꝛc.

Wahre Wurzel : 4,30213 . . . . .

Es lassen sich bei dieser Näherungsmethode mancherlei Vortheile und Abkürzungen anbringen, welche aber nicht hierher gehören. Auch läßt sie sich mit der ersten Methode

vortheilhaft verbinden, wenn man der Wurzel schon etwas nahe gekommen ist.

---

2) Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Es mögen $X=0$, $X_{,}=0$, zwei Gleichungen für die unbekannten Größen x, y, bezeichnen. Es wird angenommen, daß man die Werthe von x, y, schon ungefähr kenne; und es wird verlangt, dieselben genauer anzugeben.

I. Es mögen $x=a$, $y=b$ diese Werthe seyn. Man setze $a+h$ für x, $b+k$ für y, in den beiden gegebenen Gleichungen $X=0$, $X_{,}=0$, und behalte bei der Entwickelung der Ausdrücke X, $X_{,}$, nur diejenigen Glieder, worin bloß h und k in der ersten Potenz, nicht aber die Produkte und höheren Potenzen derselben vorkommen, indem man diese als unbedeutend vernachläßigt. Hierdurch werden sich die Gleichungen $X=0$, $X_{,}=0$, in zwei andere von nachstehender Form verwandeln:

$$A+Bh+Ck=0$$
$$A'+B'h+C'k=0$$

worin A, B, C, A', B', C', bekannte Zahlen seyn werden. Bestimmt man hieraus h, k, so hat man die Correktionen der Werthe a, b, und somit auch die Näherungswerthe von x, y, nämlich $x=a+h$, $y=b+k$, welche nun den wahren Werthen schon näher kommen werden, als die vorigen a, b.

II. Mit diesen Werthen verfahre man nun eben so, wie vorhin mit a, b, so erhält man von neuem die nöthigen Correktionen, und somit ein Paar neue Näherungs-

werthe von x, y, welche den wahren Werthen dieser Größen noch näher kommen werden, als die vorigen.

III. Auf diese Weise wird man so lange fortfahren, bis man den Werthen von x, y, nahe genug gekommen zu seyn glaubt. Bei den hierzu nöthigen Rechnungen können übrigens die Logarithmen mit Nutzen gebraucht werden.

Beispiel.

Die gegebenen Gleichungen mögen seyn:

$$x^7 - 5x^2y^4 + 1506 = 0$$
$$y^5 - 3x^4y - 103 = 0$$

Die Werthe $x = 2$, $y = 3$, thun diesen Gleichungen ungefähr ein Genüge.

Erste Correktion.

$$14 - 1172h - 2160k = 0$$
$$-4 - 288h + 357k = 0$$

Hieraus: $h = -0{,}0035$, $k = +0{,}0084$

Daher: $x = 1{,}9965$, $y = 3{,}0084$

Zweite Correktion.

$$-0{,}486 - 1189{,}170h - 2170{,}576k = 0$$
$$0{,}026 - 287{,}293h + 361{,}890k = 0$$

Hieraus: $h = -0{,}000113$, $k = -0{,}000161$

Daher: $x = 1{,}996387$, $y = 3{,}008239$

Die letzten Näherungswerthe von x, y, sind schon bis zur sechsten Decimalstelle richtig, und daher keine Correktion mehr nöthig, wofern man sie nicht etwa noch genauer haben wollte.

....

Es läßt sich nun diese Methode in allgemeinen Ausdrücken, wie folgt, darstellen. Es seyen n Gleichungen $X=0$, $X_{,}=0$, $X_{,,}=0$ rc., zwischen den n unbekannten Größen x, y, z, rc., gegeben. Es seyen ferner a, b, c, rc. die Werthe von x, y, z, rc., welche ihnen schon ziemlich nahe kommen, so daß die Abweichung von den wahren Werthen <1 angenommen werden kann. Man substituire alsdann $a+h$, $b+k$, $c+l$, rc., für x, y, z, rc., in jenen Gleichungen, und entwickele sie auf die Art, daß man nur die ersten Potenzen von h, k, l, rc., nicht aber ihre Produkte und höheren Potenzen, beibehält; so wird man n Gleichungen, zwischen den n Größen h, k, l, rc., von der Form

$$A+Bh+Ck+Dl+\text{rc.}=0$$

erhalten. Werden hieraus die Correktionen h, k, l, rc., berechnet, so hat man auch die ersten Näherungswerthe von x, y, z, rc., nämlich $x=a+h$, $y=b+k$, $z=c+l$, rc. Mit diesen Werthen verfahre man nun eben so, wie vorhin mit a, b, c, rc. Die Correktionen werden so lange fortgesetzt, bis man den Werthen von x, y, z, rc., nahe genug gekommen ist.

Das Wesen dieser Methode, nämlich die successive Correktion, ist die Grundlage der meisten Näherungsmethoden. Sie verdient, ihres großen Nutzens und ihrer Einfachheit wegen, in alle Lehrbücher der Algebra aufgenommen zu werden, obgleich sie in ihrem ganzen Umfange und mit den anzubringenden Verkürzungen erst in der Analysis gegeben werden kann.

Dritte Abtheilung,

enthaltend

Aufgaben zur Anwendung und Uebung des Vorhergehenden.

XV. Aufgaben für die Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Grösse.

1) Zwei Capitalisten berechnen ihr Vermögen; es ergiebt sich, daß der eine doppelt so reich als der andere ist, und daß sie zusammen 38700 Thlr. besitzen. Wie reich ist nun jeder?

Antw. Der eine 12900, der andere 25800 Thlr.

2) Eine Summe von 2500 Thlr. soll unter zwei Brüder so getheilt werden, daß der eine so oft vier Thlr. erhalte, als der andere einen Thaler. Wie viel erhält jeder?

Antw. Der eine 500, der andere 2000 Thlr.

3) Jemand hat 2640 Thlr., und darunter $4\frac{1}{2}$ mal so viel Münze als Courant. Wie viel hat er von jeder Münzsorte?

Antw. 480 Thlr. Courant, 2160 Thlr. Münze.

4) Die Zahl 237 in zwei solche Theile zu zerlegen, daß der eine in dem andern $1\frac{1}{4}$ mal enthalten sey. Diese Theile sind?

Antw. $105\frac{1}{3}$ und $131\frac{2}{3}$.

Was haben diese vier Aufgaben mit einander gemein?

5) Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die eine m mal so groß als die andere, und daß ihre Summe $= a$ sey. Diese Zahlen sind?

Antw. $\frac{a}{m + 1}$ und $\frac{m\,a}{m + 1}$

6) Eine Summe von 1200 Thlr. soll unter zwei Personen A und B so getheilt werden, daß sich der Antheil des A zum Antheile des B wie 2 zu 7 verhalte. Wie viel erhält jeder?

Antw. A $266\frac{2}{3}$, B $933\frac{1}{3}$ Thlr.

Wie läßt sich wohl diese Aufgabe allgemeiner darstellen?

7) Eine Zahl a in zwei solche Theile zu theilen, daß sich der erste Theil zum andern wie m zu n verhalte. Welche Theile sind es?

Antw. $\frac{m\,a}{m + n}$ und $\frac{n\,a}{m + n}$, oder auch so geschrieben: $\frac{m}{m + n}a$, $\frac{n}{m + n}a$.

Was hat diese Aufgabe mit der 5ten gemein? Und wie läßt sich die eine auf die andere bringen?

8) Wie viel Geld habe ich in der Tasche, wenn der vierte und fünfte Theil desselben zusammen genommen 2 Thlr. 6 Gr. beträgt?

Antw. 5 Thlr.

9) Zwei Freunde begegneten einem Pferdehändler, der ein schönes Pferd führte, und entschlossen sich, es gemeinschaftlich zu kaufen. Als sie wegen des Preises einig waren, fand sich, daß der eine nur den fünften, der andere

nur den siebenten Theil zu bezahlen im Stande sey; so viel schossen sie denn auch wirklich zusammen, und bezahlten damit dem Verkäufer abschläglich 48 Thlr. Wie hoch kam das Pferd zu stehen?

Antw. 140 Thlr.

Diese und die vorige Aufgabe sind einander ganz ähnlich. — Wie läßt sich wohl das Aehnliche durch allgemeine Ausdrücke darstellen?

10) Eine Zahl von solcher Beschaffenheit zu finden, daß wenn sie durch m und n dividirt wird, und hierauf die Quotienten addirt werden, die Summe $= a$ sey. Welche Zahl ist es?

Antw. $\frac{mna}{m+n}$.

11) Man soll 46 in zwei ungleiche Theile theilen, und zwar so, daß wenn der eine durch 7, der andere aber durch 3 dividirt wird, die Quotienten zusammen 10 ausmachen. Diese Theile sind?

Antw. 28 und 18.

12) Eine Zahl a in zwei solche Theile zu zerlegen, daß die Summe der Quotienten, welche erhalten werden, wenn der eine Theil durch m, der andere durch n dividirt wird, der Zahl b gleich sey. Welche Theile sind es?

Antw. $\frac{m(nb-a)}{n-m}$, $\frac{n(mb-a)}{m-n}$.

13) In einer Gesellschaft von 266 Personen, bestehend aus Offizieren, Kaufleuten und Studenten, zählt man viermal so viel Kaufleute und doppelt so viel Offiziere als Studenten. Wie viele von jedem Stande befinden sich darunter?

Antw. 38 Studenten, 152 Kaufleute und 76 Offiziere.

14) Eine Festung hat eine Garnison von 2600 Mann; darunter sind 9 mal so viel Infanteristen und 3 mal so viel Artilleristen als Cavalleristen. Wie viel Leute von jedem Corps befinden sich nun darin?

Antw. 200 Cavalleristen, 600 Artilleristen und 1800 Infanteristen.

15) Alle meine Reisen zusammen genommen, erzählt ein Reisender, belaufen sich anf 3040 Meilen: davon machte ich $3\frac{1}{2}$ mal so viel zu Wasser als zu Pferde, und $2\frac{1}{3}$ mal so viel zu Fuße als zu Wasser. Wie viele Meilen reiste dieser Mann auf jede von den drei erwähnten Arten?

Antw. 240 Meilen zu Pferde, 840 Meilen zu Wasser, und 1960 Meilen zu Fuße.

Was haben die Aufgaben 13, 14, 15, Gemeinschaftliches?

16) Eine Zahl a in drei solche Theile zu zerlegen, daß der zweite m mal und der dritte n mal so groß sey als der erste. Welche Theile sind es?

Antw. $\frac{a}{1+m+n}, \frac{ma}{1+m+n}, \frac{na}{1+m+n}$.

17) Ich multiplicirte eine gewisse Zahl mit 4, und dividirte das Produkt durch 3, da erhielt ich 24. Welche Zahl ist es?

Antw. 18.

18) Ein Feld von 864 Quadratruthen soll unter drei Bauern A, B, C, so vertheilt werden, daß sich der Antheil des A zum Antheile des B wie 5 zu 11 verhalte, und daß C so viel bekomme, als A und B zusammen. Wie viel erhält jeder?

Antw. A 135, B 297, C 432 Quadratruthen.

19) 1170 Thlr. sollen unter drei Personen A, B, C, nach Verhältniß ihres Alters vertheilt werden. Nun ist B um den dritten Theil älter, C aber doppelt so alt als A. Wie viel erhält jeder?

Antw. A 270, B 360, C 540 Thlr.

20) Zu einem bevorstehenden Kriege sollen drei Städte A, B, C, ihr Contingent von 594 Mann stellen; die Vertheilung soll nach Verhältniß ihrer Volksmenge geschehen. Wenn nun die Volksmenge von A sich zu der von B wie 3 zu 5, die Volksmenge von B aber sich zu der von C wie 8 zu 7 verhält: wie viel Mann wird alsdann jede Stadt stellen müssen?

Antw. A 144, B 240, C 210 Mann.

21) Eine Schuldmasse von 21000 Thlr. soll unter vier Gläubiger A, B, C, D, nach Verhältniß ihrer Forderungen vertheilt wereen. Nun verhält sich die Forderung des A zu der des B wie 2 zu 3, die Forderung des B zu der des C wie 4 zu 5, und die Forderung des C zu der des D wie 6 zu 7. Wie viel erhält demnach jeder Gläubiger?

Antw. A 3200, B 4800, C 6000, D 7000 Thlr.

22) Eine Zahl a in drei solche Theile zu zerlegen, daß der erste Theil sich zum zweiten wie m zu n, und der zweite Theil zum dritten wie p zu q verhalte. Diese Theile sind?

Antw. $\frac{mpa}{mp+np+nq}$, $\frac{npa}{mp+np+nq}$, $\frac{nqa}{mp+np+nq}$.

23) Den dritten Theil meiner jährlichen Einkünfte, sagt Jemand, verwende ich auf Kost und Miethe, den achten Theil auf Kleidung und Wäsche, den zehnten Theil auf

Nebenausgaben, und erspare dabei noch jährlich 318 Thlr. Wie hoch belaufen sich seine jährlichen Einkünfte?

Antw. Auf 720 Thlr.

24) Ein Kaufmann findet, daß er durch einen glücklichen Handel mit seinem angelegten Capitale 15 Procent gewonnen hat, und daß dasselbe dadurch auf 15571 Thlr. angewachsen ist. Was war sein angelegtes Capital?

Antw. 13540 Thlr.

25) Ein Capital ist zu $4\frac{1}{2}$ Procent jährlicher Zinsen auf ein Jahr ausgeliehen worden; nach Verlauf dieses Jahres erhielt man an Capital und Zinsen 13167 Thlr. zurück. Wie viel betrug das Capital?

Antw. 12600 Thlr.

26) Der Ertrag eines Gutes ist, wegen verbesserter Oekonomie, in diesem Jahre 8 Procent größer als im vorigen. Der diesjährige Ertrag ist 1890 Thlr.: wie viel war der vorjährige?

Antw. 1750 Thlr.

27) Das Pfund einer gewissen Waare wird für 18 Gr. verkauft; hieraus erwächst für den Verkäufer ein Gewinn von $12\frac{1}{2}$ Procent. Wie viel hat der Centner dieser Waare gekostet?

Antw. $73\frac{1}{3}$ Thlr.

28) Was für ein Capital ist es, daß mit den fünfjährigen Zinsen, die jährlichen Zinsen zu 4 Procent gerechnet, 8208 Thlr. beträgt?

Antw. 6840 Thlr.

29) Ein Spieler verlor in dem ersten Spiele den sechs-

ten Theil, und in dem zweiten Spiele den zehnten Theil seiner mitgebrachten Barschaft, gewann aber in dem dritten Spiele den dritten Theil derselben wieder. Er zählte sein Geld, und fand, daß er 3 Thlr. gewonnen habe. Wie viel hatte er mitgebracht?

Antw. 45 Thlr.

30) Es giebt zwei Zahlen, deren Summe 96, und deren eine um 16 größer ist als die andere. Welche Zahlen sind es?

Antw. 40 und 56.

31) Nach einem, von zwei Kaufleuten glücklich beendigten Handelsgeschäfte, soll der auf 1200 Thlr. sich belaufende Gewinn unter sie so getheilt werden, daß der eine als Theilnehmer nur halb so viel wie der andere erhalte, außerdem aber noch 50 Thlr. für seine übernommene Mühe. Wie viel wird jeder bekommen?

Antw. Der eine $433\frac{1}{3}$, der andere $766\frac{2}{3}$ Thlr.

32) 1520 Thlr. sollen unter drei Personen A, B, C, so getheilt werden, daß B 100 Thlr. mehr als A, C aber 270 Thlr. mehr als B erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

Antw. A 350, B 450, C 720 Thlr.

33) Eine Wittwe soll, nach dem Testamente ihres verstorbenen Ehemannes, mit ihren zwei Söhnen und drei Töchtern eine Summe von 7500 Thlr. theilen, und zwar soll jeder Sohn doppelt so viel bekommen wie jede Tochter, sie selbst aber gerade so viel wie ihre Kinder zusammen genommen, und noch überdies 500 Thlr. Wie viel wird die Wittwe und jedes ihrer Kinder bekommen?

Antw. Die Wittwe 4000, jeder Sohn 1000, und jede Tochter 500 Thlr.

34) Eine Gesellschaft von 90 Personen bestehet aus Männern, Weibern und Kindern; der Männer sind 4 mehr als der Weiber, der Kinder 10 mehr als der Erwachsenen. Wie viel Männer, Weiber und Kinder befinden sich nun darunter?

Antw. 22 Männer, 18 Weiber und 50 Kinder.

35) Eine Holzung von 8000 Quadratfuß soll unter drei Bauerhöfe A, B, C, so vertheilt werden, daß B 276 Quadratfuß weniger als A, C aber 1112 Quadratfuß mehr als B erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

Antw. A 2480, B 2204, C 3316 Quadratfuß.

36) Ein Vater schenkt seinen fünf Söhnen zusammen 1000 Thlr., welche sie nach der Stufenfolge ihres Alters unter sich theilen sollen, und zwar so, daß jeder ältere 20 Thlr. mehr bekomme als der zunächst jüngere. Wie viel wird der jüngste erhalten?

Antw. 160 Thlr.

37) Eine gewisse Summe soll unter drei Personen A, B, C, wie folgt, getheilt werden: A soll 3000 Thlr. weniger als die Hälfte, B 1000 Thlr. weniger als den dritten Theil, C aber 800 Thlr. über den vierten Theil dieser Summe erhalten. Wie groß ist die zu vertheilende Summe? Und wie viel bekommt jeder?

Antw. Die ganze Summe ist 38400 Thlr.; A bekommt 16200, B 11800, C 10400 Thlr.

38) Ein Sterbender bestimmt in seinem Testamente seiner Frau die Hälfte seines hinterlassenen Vermögens,

jedem von seinen beiden Söhnen den sechsten Theil, seinem treuen Bedienten den zwölften Theil, und die noch übrigen 600 Thlr. den Armen. Wie groß war sein hinterlassenes Vermögen?

Antw. 7200 Thlr.

39) Eine Wiese von 2850 Quadratfuß soll unter drei Gutsherren A, B, C, vertheilt werden; der Antheil des A soll sich zum Antheile des B wie 6 zu 11 verhalten, und C soll 300 Quadratfuß mehr haben als A und B zusammen. Wie viel wird jeder erhalten?

Antw. A 450, B 825, C 1575 Quadratfuß.

40) Ein Vater hinterläßt vier Söhne A, B, C, D, und ein Vermögen von 2520 Thlr., welches sie, wie folgt, unter sich theilen sollen: C soll 360 Thlr. haben, B so viel als C und D zusammen, A aber doppelt so viel als B weniger 1000 Thlr. Wie viel wird A, B und D bekommen?

Antw. A 760, B 880, D 520 Thlr.

41) Fünf Erben sollen eine Erbschaft von 5600 Thlr. unter sich theilen: B soll doppelt so viel als A und noch 200 Thlr. haben; C dreimal so viel als A weniger 400 Thlr.; D die Hälfte von dem, was B und C zusammen bekommen und noch 150 Thlr.; E aber den vierten Theil von dem, was seine vier Vorgänger erhalten haben und noch 475 Thlr. Wie viel wird jeder bekommen?

Antw. A 500, B 1200, C 1100, D 1300, E 1500 Thlr.

42) Fünf Spieler haben zusammen 40 Thlr. 15 Gr. verloren, und zwar beträgt der Verlust des B $\frac{1}{2}$ Thlr. mehr als das Dreifache von dem Verluste des A, der Verlust des C 2 Thlr. weniger als das Doppelte von dem Verluste

3 B; C verlor $\frac{1}{4}$ Thlr. weniger als A und B zusammen
nommen, und E zweimal so viel als B, weniger 3 Gr.
ie viel hat jeder verloren?

Antw. A 2, B $6\frac{1}{2}$, C 11, D $8\frac{1}{4}$, E $12\frac{7}{8}$ Thlr.

43) Von einer Waare, die 40 Centner wog, wurde
: gewisser Theil verkauft, und man behielt 8 Centner
:hr übrig als verkauft wurden. Wie viel Centner wur-
n verkauft?

Antw. 16.

44) Ich hatte einmal 42 Thlr. bei mir; hiervon gab
ein Gewisses aus, und behielt doch noch dreimal so
el übrig als ich ausgegeben hatte. Wie viel hatte ich
isgegeben?

Antw. $10\frac{1}{2}$ Thlr.

45) Zwei Herren A und B spielten Billard. A hatte
or dem Spiele 42, und B 24 Thlr. bei sich. Nach eini-
n, theils gewonnenen, theils verlornen Partien, sieht sich
im Besitze von fünfmal so viel Geld als dem B noch
)rig bleibt. Wie viel hatte A gewonnen?

Antw. 13 Thlr.

46) Die Garnison einer gewissen Stadt bestehet aus
250 Mann, theils Infanterie, theils Cavallerie. Jeder
avallerist bekommt monatlich 5, und jeder Infanterist
Thlr. Wenn nun der monatliche Sold der Garnison
150 Thlr. beträgt: wie viele Cavalleristen und wie viele
nfanteristen befinden sich darunter?

Antw. 200 Cavalleristen und 1050 Infanteristen.

47) Ein Maurer, zwölf Gesellen und vier Handlanger
atten für eine gewisse Zeit zusammen 61 Thlr. 12 Gr.

Arbeitslohn erhalten; der Maurer erhielt täglich 12, jeder Geselle 10, und jeder Handlanger 8 Gr. Wie viele Tage mußten sie für dieses Geld gearbeitet haben?

Antw. 9 Tage.

48) Ein Capitalist ziehet von seinen auf Zinsen stehenden Capitalien 2940 Thlr. jährlicher Renten; vier Fünftel derselben trägt 4, und ein Fünftel trägt 5 Procent. Wie viel Geld hat er ausstehen?

Antw. 70000 Thlr.

49) Ich habe eine gewisse Zahl im Sinne, spricht A zu B, versuche es, sie zu errathen. Ich multiplicire meine Zahl mit 7, setze zum Produkte 3 hinzu, dividire hierauf durch 2, ziehe von dem Quotienten 4 ab, und ich erhalte 15; welche Zahl ist es nun?

Antw. 5.

50) Es sollen 3 Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die zweite durch die erste dividirt, 2 zum Quotienten und 1 für den Rest, hingegen die dritte durch die zweite dividirt, 3 zum Quotienten und 3 für den Rest gebe; die Summe dieser drei Zahlen soll 70 seyn. Welche Zahlen sind es?

Antw. 7, 15, 48.

51). Wie viel Geld hast du bei dir? fragte jemand seinen Freund. Ich habe so viele Groschen bei mir, antwortete dieser, daß wenn ich ihre Anzahl mit 5 multiplicire, von dem Produkte 3 abziehe, den Rest wieder mit 4 multiplicire, und zum Produkte 2 addire, alsdann von der Zahl, welche herauskömmt, die Null zur Rechten weglasse, ich 23 erhalte. Wie viele Groschen hatte er bei sich?

Antw. 12.

52) Ein Rechenmeister verlangt von seinen Schülern, daß sie eine Zahl, welche er im Sinne habe, aus folgenden Angaben berechnen sollen. Wenn ihr diese Zahl, sagt er, mit 5 multiplicirt, von dem Produkte 24 abziehet, den Rest durch 6 dividirt, und zum Quotienten 13 addirt, so erhaltet ihr diese Zahl selbst: welche Zahl ist es nun?

Antw. 54.

53) Einem Boten, der schon vor 10 Tagen von einem gewissen Orte abgegangen war, wird aus demselben Orte und auf demselben Wege, ein anderer Bote nachgeschickt, um jenen einzuholen. Wenn nun der erste Bote täglich 4, der andere täglich 9 Meilen zurücklegt: wie viele Tage wird der zweite brauchen, um den ersten einzuholen?

Antw. 8 Tage.

54) Vor n Tagen ging ein Bote von hier ab, der täglich a Meilen macht; ihm wird ein anderer nachgeschickt, der täglich b Meilen macht: wie viele Tage wird der zweite brauchen, um den ersten einzuholen?

Antw. $\frac{na}{b-a}$ Tage.

55) In welcher Zeit wird aber der zweite Bote den ersten einholen, wenn bloß gesagt wird, der zweite gehe 12 Tage später ab als der erste, und seine Geschwindigkeit verhalte sich zur Geschwindigkeit des ersten wie 8 zu 3?

Antw. In $7\frac{1}{5}$ Tagen.

56) Zwei Körper bewegen sich in gerader Richtung von demselben Orte aus hinter einander her; der zweite fängt n Sekunden später an sich zu bewegen, und seine Geschwindigkeit verhält sich zur Geschwindigkeit des ersten

wie q zu p. Nach welcher Zeit werden diese Körper auf einander stoßen?

Antw. $\frac{pn}{q-p}$ Sekunden nach dem Abgange des zweiten.

57) Aus einem gewissen Orte wird ein Courier abgeschickt, der alle 5 Stunden 7 Meilen macht. 8 Stunden nach seiner Abreise wird ihm ein anderer nachgeschickt, und dieser muß, um jenen einzuholen, alle 3 Stunden 5 Meilen machen. Wann werden sie sich begegnen?

Antw. 42 Stunden nach der Abreise des zweiten Couriers.

58) Wenn alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, nur daß der erste Courier, außer dem Vortheile der früheren Abreise, auch noch diesen hätte, daß er von einem um 8 Meilen mehr vorwärts gelegenen Orte abreiste: nach wie vielen Stunden würden sie in diesem Falle zusammentreffen?

Antw. 72 Stunden nach der Abreise des zweiten Couriers.

59) Es sey, um der vorigen Aufgabe die erforderliche Allgemeinheit zu geben, der Ort, von welchem der erste Courier ausgeht, um a Meilen mehr vorwärts gelegen; es sey ferner die Anzahl der Stunden, um welche er früher abreiste, $= b$; die Geschwindigkeit des ersten Couriers sey so groß, daß er in d Stunden c Meilen zurücklegt, und die Geschwindigkeit des zweiten Couriers so groß, daß er in f Stunden e Meilen zurücklegt. In wie vielen Stunden nach der Abreise des zweiten Couriers werden sie zusammentreffen?

Antw. In $\frac{(ad+bc)f}{de-cf}$ Stunden.

60) In wie vielen Stunden aber werden sie sich begegnen, wenn der erste Courier, anstatt von einem um a Meilen vorwärts gelegenen Orte, von einem um eben so viel rückwärts gelegenen Orte abreiste?

Antw. In $\frac{(bc - ad)f}{de - cf}$.

Was muß man thun, um die Auflösung der vorigen Aufgabe diesem Falle anzupassen?

61) Aus dem Orte A marschirt ein Regiment gerades Weges nach dem Orte B, und macht täglich $3\frac{1}{2}$ Meilen. Aus dem Orte B marschirt 8 Tage nachher ein anderes Regiment gerade auf A los, und macht täglich $5\frac{1}{8}$ Meilen. Wenn nun beide Oerter 80 Meilen von einander entfernt sind: an welchem Tage nach dem Ausmarsche des ersten werden diese Regimenter zusammen treffen?

Antw. Am vierzehnten Tage.

Welche Werthe muß man den Größen a, b, c, d, e, f, der 59sten Aufgabe beilegen, um die daselbst gegebene Auflösung dem gegenwärtigen einzelnen Falle anzupassen, wenn man nicht etwa diese Aufgabe wieder von neuem auflösen wollte?

62) Zwei Körper bewegen sich nach gerade entgegengesetzten Richtungen; der eine läuft in jeder Sekunde c Fuß, der andere C Fuß. Die beiden Oerter, von welchen sie zu gleicher Zeit ausgehen, sind d Fuß von einander entfernt. Wann werden sie zusammen stoßen?

Antw. Nach $\frac{d}{C + c}$ Sekunden.

63) Nach welcher Zeit werden aber diese beiden Körper zusammen treffen, wenn der, welcher C Fuß in jeder Sekunde macht, hinter dem andern herläuft?

Antw. Nach $\frac{d}{C-c}$ Sekunden.

Ist die Aufgabe, so wie sie hier vorgetragen, immer möglich? Und was wird erfordert, wenn sie möglich seyn soll? — Was will der Ausdruck $\frac{d}{C-c}$ sagen, wenn $C=c$ ist? Wie ist er zu deuten, wenn $C<c$ ist?

64) Ein feindliches Corps ist vor zwei Tagen von einem gewissen Orte aufgebrochen, und macht täglich $4\frac{1}{2}$ Meilen. Man will ihm von dem nämlichen Orte aus nachsetzen, und zwar so schnell, daß man es in sechs Tagen erreicht habe. Wie viele Meilen müssen zu dem Ende täglich gemacht werden?

Antw. 6 Meilen.

65) Zwei Körper bewegen sich hintereinander nach derselben Richtung; der erste hat einen Vorsprung von d Längeneinheiten (z. B. Fuße) und von t Zeiteinheiten (z. B. Sekunden); der erste durchläuft in jeder Zeiteinheit c, der zweite C Längeneinheiten. Wie viele Zeiteinheiten werden erfordert, wenn der zweite mit dem ersten zusammen treffen soll?

Antw. $\frac{d+ct}{C-c}$ Zeiteinheiten.

66) Wie viele Zeiteinheiten hingegen werden erfordert, wenn sie, anstatt hinter einander, gegen einander laufen, und alles Uebrige ungeändert bleibt?

Antw. $\frac{d-ct}{C+c}$ Zeiteinheiten.

Wie läßt sich dieser Ausdruck aus dem in der vorigen Aufgabe gefundenen herleiten?

67) Um Zwölfe stehen beide Zeiger einer Uhr über einander: wann und wie oft werden diese Zeiger in den nächsten zwölf Stunden wieder über einander stehen?

Antw. 11 mal werden die Zeiger zusammen treffen, und zwar $5\frac{5}{11}$ Minuten nach eins, $10\frac{10}{11}$ Minuten nach zwei, $16\frac{4}{11}$ Minuten nach drei, u. s. w., nämlich in jeder folgenden Stunde um $5\frac{5}{11}$ Minuten später.

68) Zwei Körper bewegen sich hinter einander auf der Peripherie eines Kreises, welche p Fuß mißt. Anfänglich stehen sie um einen Bogen von d Fuß von einander ab; der erste macht c Fuß, der zweite C Fuß in jeder Sekunde. Wann werden diese beiden Körper zum erstenmal, zweitenmal, u. s. w. zusammentreffen, vorausgesetzt, daß sie sich in ihrer Bewegung gegenseitig nicht stören?

Antw. Nach $\frac{d}{C-c}$, $\frac{p+d}{C-c}$, $\frac{2p+d}{C-c}$, $\frac{3p+d}{C-c}$, u. s. w. Sekunden.

69) Wann werden sie aber zusammentreffen, wenn der erste um t Sekunden früher als der zweite sich zu bewegen anfängt?

Antw. Nach $\frac{d+ct}{C-c}$, $\frac{p+d+ct}{C-c}$, $\frac{2p+d+ct}{C-c}$, $\frac{3p+d+ct}{C-c}$, u. s. w. Sekunden.

70) Wann aber, wenn der erste sich um t Sekunden später als der zweite zu bewegen anfängt?

Antw. Nach $\frac{d-ct}{C-c}$, $\frac{p+d-ct}{C-c}$, $\frac{2p+d-ct}{C-c}$, u. s. w. Sekunden.

71) Wann aber, wenn der erste, anstatt dem zweiten vorzugehen, gegen ihn läuft, und sich um t Sekunden früher zu bewegen anfängt?

Antw. Nach $\frac{d-ct}{C+c}$, $\frac{p+d-ct}{C+c}$, $\frac{2p+d-ct}{C+c}$, u. s. w. Sekunden.

72) Wann aber, wenn der erste zwar wieder gegen den zweiten läuft, aber sich um t Sekunden später zu bewegen anfängt?

Antw. Nach $\frac{d+ct}{C+c}$, $\frac{p+d+ct}{C+c}$, $\frac{2p+d+ct}{C+c}$, u. s. w. Sekunden.

Woher die Veränderung der Vorzeichen in den Auflösungen dieser fünf, einander so ähnlichen Aufgaben, da doch sonst die Ausdrücke in allem sich gleich sind? — Könnte man sie auch wohl durch die Beachtung des Entgegengesetzten von einander ableiten? — Was wollen diese Ausdrücke in der 68, 69 und 70sten Aufgabe sagen, wenn $C=c$ wird? Wie sind sie zu deuten, wenn $C<c$ ist?

....

Was ist ein zusammengesetztes Verhältniß? Und wo finden sich Beispiele davon? — Das Verhältniß zweier Größen kann aus zwei, drei und mehr einfachen Verhältnissen zusammengesetzt seyn. Sie sind in der Größenlehre und ihrer Anwendung von der größten Wichtigkeit.

....

73) Aus zwei Oeffnungen eines Behälters, von verschiedener Größe, strömt das Wasser mit einer ungleichen Geschwindigkeit heraus. Man weiß, daß die Oeffnungen sich wie 5 zu 13, die Geschwindigkeit der Wasserströme aber wie 8 zu 7 verhalten; man weiß ferner, daß aus der einen Oeffnung, in einem gewissen Zeitraume, 561 Cubikfuß Wasser mehr floß als aus der andern. Wie viel Wasser gab nun jede Oeffnung in diesem Zeitraume?

Antw. Die eine 440, die andere 1001 Cubikfuß.

74) Ein Hund verfolgt einen Hasen. Ehe der Hund zu laufen anfängt, hat der Hase schon 50 Sprünge gemacht, und dies ist ihre anfängliche Entfernung. Wenn nun der Hase in eben der Zeit 6 Sprünge macht, in welcher der Hund 5 Sprünge thut, und 9 Hasensprünge, in Ansehung ihrer Größe, 7 Hundesprüngen gleich gerechnet werden: wie viele Sprünge wird der Hase noch machen können, ehe der Hund ihn einholt?

Antw. 700 Sprünge.

75) Zwei Bombardiere werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben. Der erste hatte schon 36 Würfe gemacht, ehe der zweite zu werfen anfängt, und macht in eben der Zeit 8 Würfe, worin der zweite deren 7 macht; hingegen braucht der zweite zu 3 Würfen so viel Pulver, als der erste zu 4. Wie viel Würfe wird der zweite machen müssen, bis er so viel Pulver verbraucht hat als der erste?

Antw. 189 Würfe.

76) Wie geht es zu, fragte ein Spaziergänger einen andern, daß du mir um 3000 Fuß vorgeeilt bist, ungeachtet ich doppelt so große Schritte machte wie du? — Das gebe ich zu, erwiederte ihm jener, aber ich machte hingegen fünfmal so viele Schritte wie du. Wenn nun dies alles seine Richtigkeit hat: wie viel Fuß mußte jeder zurückgelegt haben?

Antw. Der erste 2000, der zweite 5000 Fuß.

77) Es sey, um die vorige Aufgabe allgemeiner zu machen, die Anzahl der Fuße, um welche der zweite Spaziergänger dem ersten vorgeeilt ist, $= a$; das Verhältniß ihrer Schritte in Hinsicht auf Größe $= b : c$, und in

Hinsicht auf Zahl $= d : e$. Welche Ausdrücke geben ihre zurückgelegten Wege?

Antw. $\frac{abd}{ce-bd}$, $\frac{ace}{ce-bd}$.

78) Zwei Größen, deren Differenz $= d$, stehen, wegen irgend einer Ursache, in dem Verhältnisse $m:n$ zu einander; wegen irgend einer andern Ursache aber, von welcher angenommen wird, daß sie die Wirkung jener ersten nicht störe, in dem Verhältnisse $m':n'$. Wie werden diese Größen ausgedrückt?

Antw. $\frac{mm'd}{nn'-mm'}$, $\frac{nn'd}{nn'-mm'}$, oder $\frac{mm'}{nn'-mm'} \cdot d$, $\frac{nn'}{nn'-mm'} \cdot d$, sind die Ausdrücke für diese Größen. Die Einheit ist für jeden einzelnen Fall die, wodurch d angegeben wird.

Welche Werthe muß man den Buchstaben m, m', n, n', d, beilegen, wenn die Aufgaben 73, 74, 75, 76, 77, unter diesen begriffen seyn sollen?

79) Zwei Größen, deren Differenz $= d$, stehen, dreier Ursachen wegen, von welchen angenommen wird, daß sie wechselseitig auf ihre Wirkungen keinen Einfluß haben, in den Verhältnissen $m:n$, $m':n'$, $m'':n''$. Wie werden diese beiden Größen ausgedrückt?

Antw. $\frac{mm'm''}{nn'n''-mm'm''} \cdot d$, $\frac{nn'n''}{nn'n''-mm'm''} \cdot d$, sind die gesuchten Ausdrücke; die Einheit die nämliche als für d.

80) Wenn nun aber anstatt des Unterschiedes d, die Summe s dieser Größen gegeben ist: wie werden sie alsdann ausgedrückt?

Antw. $\frac{mm'm''}{nn'n''+mm'm''} \cdot s$, $\frac{nn'n''}{nn'n''+mm'm''} \cdot s$, sind alsdann die gesuchten Ausdrücke.

81) Es giebt jemand ein Capital von 5500 Thlr. zu 4 Procent auf Zinsen, und $4\frac{1}{2}$ Jahr nachher ein anderes Capital von 8000 Thlr, zu 5 Procent. Wenn er nun diese zwei Capitalien fortwährend auf Zinsen stehen läßt: in wie vielen Jahren wird er von beiden gleich viel an Zinsen gezogen haben?

Antw. In 10 Jahren, von der Zeit an gerechnet, wo er das erste Capital auslieh.

82) Es besitzt jemand einen Wagen, der die eigene mechanische Einrichtung hat, daß man auf einer Reise den Unterschied der Umläufe der Räder zu bestimmen im Stande ist. Man weiß, daß jedes von den beiden Vorderrädern $5\frac{1}{4}$, und jedes von den beiden Hinterrädern $7\frac{1}{8}$ Fuß im Umfange hat. Wenn nun bei einer Reise das Vorderrad 2000 Umläufe mehr als das Hinterrad gemacht hat: wie groß ist der Weg, den man zurücklegte?

Antw. 39900 Fuß, oder ungefähr $1\frac{2}{3}$ Meilen.

83) Wenn das Vorderrad des in der vorigen Aufgabe erwähnten Wagens a Fuß, und das Hinterrad b Fuß im Umfange hätte, wie groß würde der zurückgelegte Weg seyn, wenn das Vorderrad n Umläufe mehr als das Hinterrad gemacht hat?

Antw. $\frac{abn}{b-a}$ Fuß.

84) Ein Weinhändler hat zweierlei Weine; von dem einen kostet das Quart 36 Gr., von dem andern 20 Gr. Er will nun beide Weine in solchen Quantitäten mit ein=

ander vermischen, daß er 50 Quart habe, und jedes Quart, ohne Nutzen oder Schaden, für 30 Gr. verkaufen könne. Wie viel muß er von jeder Sorte zu dieser Mischung nehmen?

Antw. $31\frac{1}{4}$ Quart von der bessern, und $18\frac{3}{4}$ Quart von der schlechtern Sorte.

85) Der Preis des bessern Weines in der vorigen Aufgabe sey $= a$, der Preis des schlechtern $= b$, die Anzahl der Quarte, welche durch die Mischung hervorgebracht werden sollen, $= n$, und der Preis dieser Mischung $= c$: wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

Antw. $\frac{(a-c)n}{a-b}$ Quart von der schlechtern, und $\frac{(c-b)n}{a-b}$ von der bessern Sorte.

86) Ein Goldarbeiter hat zweierlei Silber, nämlich vierzehnlöthiges (d. h. solches, von welchem die Mark 14 Loth reines Silber und 2 Loth Zusatz enthält) und achtlöthiges. Er kann es aber weder so gut als das erste, noch so schlecht als das zweite brauchen, denn er will eine Schüssel verfertigen, die 20 Mark schwer und im Gehalte zwölflöthig seyn soll. Wie viel Mark muß er von jedem Silber nehmen, um durch das Zusammenschmelzen sowohl das verlangte Gewicht als den verlangten Gehalt hervorzubringen?

Antw. $13\frac{1}{3}$ Mark von dem bessern, und $6\frac{2}{3}$ Mark von dem schlechtern Silber.

87) Ein Weinhändler hat 40 Quart Wein, von welchem er jedes Quart für 1 Thlr. 8 Gr. verkauft. Da ihm aber dieser Preis für seine Kunden zu hoch däucht, so will er, um, wie er meint, rechtlich zu verfahren, so viel Wasser hinzu

gießen, daß er das Quart des gemischten Weines für 20 Gr. verkaufen könne. Wie viel Wasser muß er zugießen?

Antw. 24 Quart.

88) Jemand hat 35 Mark funfzehnlöthiges Silber, und will so viel Kupfer zusetzen, daß die Mark nur 12 Loth an reinem Silber enthalte. Wie viel Kupfer muß er zusetzen?

Antw. $8\frac{3}{4}$ Mark.

89) Wie viel achtlöthiges Silber muß man zu $7\frac{1}{2}$ Mark dreizehnlöthiges schmelzen, wenn der Gehalt auf 9 Loth gebracht werden soll?

Antw. 30 Mark.

90) Jemand verlangt 17 Geldstücke, nämlich Vier- und Sechsgroschenstücke für 3 Thlr. 18 Gr.: wie viele Stücke von jeder Sorte kann man ihm dafür geben?

Antw. 6 Vier- und 11 Sechsgroschenstücke.

Was hat diese Aufgabe mit der 84sten und 86sten gemein? Und wie läßt sich dieses Gemeinschaftliche durch Worte darstellen? *)

91) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe $=a$, und welche so beschaffen sind, daß, wenn die erste mit m, die andere mit n multiplicirt wird, die Summe der Produkte $=b$ sey. Welche Ausdrücke geben diese Zahlen?

Antw. $\frac{b-na}{m-n}$, $\frac{ma-b}{m-n}$.

Was wollen diese Ausdrücke sagen, wenn $m=n$ wird? Was, wenn zu gleicher Zeit $b=na=ma$ wird?

92) Einer meiner Bekannten ist jetzt 40, sein Sohn 9 Jahr alt: nach wie vielen Jahren wird dieser Mann, der

*) Diese Klasse von Aufgaben kommt irgendwo noch einmal vor.

jetzt über viermal so alt als sein Sohn ist, nur doppelt so alt seyn?

Antw. Nach 22 Jahren.

93) Einer meiner Bekannten ist jetzt 30, sein älterer Bruder 20 Jahr alt, und folglich 3:2 das Verhältniß seines Alters zu dem seines Bruders: nach wie vielen Jahren wird das Verhältniß nur 5:4 seyn?

Antw. Nach 20 Jahren.

94) Vor wie vielen Jahren hingegen war er 6 mal so alt als sein Bruder?

Antw. Vor 18 Jahren.

95) Er hat aber außer dem erwähnten Bruder noch einen, der jetzt nur 6 Jahr alt ist. Wann werden seine beiden Brüder zusammen so alt als er selbst seyn?

Antw. Nach 4 Jahren.

96) Sein Vater ist jetzt 49 Jahr alt, und folglich sind jetzt die drei Brüder zusammen 7 Jahr älter als ihr Vater; es gab aber eine Zeit, wo der Vater genau so alt war als seine drei Söhne zusammen. Wie lange ist dies her?

Antw. $3\frac{1}{2}$ Jahre.

97) Einst sagte ihm sein Vater, (der jüngste Sohn war damals noch nicht geboren,) daß er um den vierten Theil älter wäre als seine beiden Söhne zusammen. Wie lange ist dies her?

Antw. 9 Jahre.

98) Salpeter und Schwefel sind zu einer Masse von 80 Pfund vermischt, und zwar in einem solchen Verhält-

nisse, das auf 7 Theile Salpeter 3 Theile Schwefel kommen. Wie viel Salpeter muß der Masse noch zugesetzt werden, wenn das Verhältniß dieser beiden Stoffe von der Art seyn soll, daß auf 11 Theile Salpeter 4 Theile Schwefel kommen?

Antw. 10 Pfund.

99) Wie viel Schwefel muß hingegen der Masse entzogen werden, wenn das verlangte Verhältniß 11 : 4 hervorgebracht werden soll?

Antw. $3\frac{7}{11}$ Pfund.

100) Wenn nun aber eben so viel Salpeter zugesetzt werden soll, als dem Schwefel entzogen wird, damit das Gewicht der ganzen Masse unverändert bleibe: wie viel Salpeter muß der Masse zugesetzt, und ihr dafür an Schwefel entzogen werden?

Antw. $2\frac{2}{3}$ Pfund.

101) In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal so viele Herren als Damen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältniß der Anwesenden von beiden Geschlechtern noch ungleicher, es blieben nämlich gar noch fünfmal so viel Herren als Damen. Aus wie vielen Personen von jedem Geschlecht bestand diese Gesellschaft anfangs?

Antw. Aus 48 Herren und 16 Damen.

102) Welche Zahl muß zu den beiden gegebenen Zahlen a und b addirt werden, wenn die Summen das Verhältniß $m:n$ haben sollen? Oder, welches das Nämliche sagt: zu welcher Zahl müssen a und b addirt werden, wenn die Summen das gegebene Verhältniß $m:n$ haben sollen?

Antw. $\frac{mb-na}{n-m}$ ist die gesuchte Zahl.

103) Welche Zahl muß zu a addirt und von b subtrahirt werden, wenn die Summe zur Differenz das Verhältniß $m:n$ haben soll?

Antw. $\frac{mb-na}{m+n}$.

104) Welche Zahl muß von a und b subtrahirt werden, wenn die Differenzen das Verhältniß $m:n$ haben sollen.

Antw. $\frac{na-mb}{n-m}$.

In diesen drei letztern Aufgaben sind die Aufgaben 92, 93, 94, 98, 99, 100, als einzelne Fälle enthalten. Welche Werthe muß man den Größen a, b, m, n, beilegen, um die Formeln jenen Fällen anzupassen?

105) An einem vollen Weinfasse befinden sich drei Spundlöcher; durch das erste könnte der Wein in 2, durch das zweite in 3, und durch das dritte in 4 Stunden abgezapft werden. Welche Zeit wird zur Abzapfung erfordert, wenn alle drei Spundlöcher zugleich geöffnet werden?

Antw. $55\frac{5}{13}$ Minuten.

106) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden; durch die erste Röhre kann solches in $1\frac{1}{2}$, durch die zweite in $3\frac{1}{3}$, nnd durch die dritte in 5 Stunden geschehen. In welcher Zeit wird dieser Wasserbehälter gefüllt werden, wenn man alle drei Röhren zugleich öffnet?

Antw. In 48 Minuten.

107) Es sey, um die vorige Aufgabe allgemeiner zu machen, die Zeit, welche die erste Röhre zur Füllung des Behälters braucht, $=a$; die Zeit, welche die zweite dazu braucht, $=b$, und die Zeit, welche die dritte dazu braucht,

c. Welcher Ausdruck giebt die Zeit, worin die Füllung rch alle drei Röhren zugleich geschiehet?

Antw. $\frac{abc}{ab+ac+bc}$.

108) Welcher Ausdruck giebt die Zeit, worin vier)hren den Behälter füllen, wenn sie ihn einzeln in den iten a, b, c, d füllen?

Antw. $\frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd}$.

109) Drei Maurer sollen eine Mauer aufführen. Der ste kann 8 Cubikfuß in 5 Tagen, der zweite 9 Cubikfuß 4 Tagen, und der dritte 10 Cubikfuß in 6 Tagen zu tande bringen. Wie viel Zeit werden diese drei Maurer :auchen, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten, um 756 Cubik- ıß von dieser Mauer aufzuführen?

Antw. $137\frac{13}{331}$ Tage.

110) Ein Handwerker kann eine gewisse durch a aus- :drückte Arbeit, in einer durch b ausgedrückten Zeit ver- rtigen; ein anderer Handwerker die Arbeit c in der Zeit , und ein dritter die Arbeit e in der Zeit f. In welcher eit werden diese drei Handwerker gemeinschaftlich die Ar- :it g zu Stande bringen?

Antw. In der Zeit $\frac{bdfg}{adf+bcf+bde}$. Die Einheit der ;eit ist in diesem Ausdrucke diejenige, worauf sich die Grö- en b, d, f, beziehen.

111) Ein Wasserbehälter von $755\frac{1}{4}$ Cubikfuß soll durch rei Röhren gefüllt werden. Die erste giebt 12 Cubikfuß n $3\frac{1}{4}$ Tagen, die zweite $15\frac{1}{2}$ Cubikfuß in $2\frac{1}{2}$ Tagen, und

die dritte 17 Cubikfuß in 3 Tagen. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt werden?

Antw. In $48\frac{3}{4}$ Tagen.

112) Drei Ursachen bringen einzeln in den Zeiten t, t', t'', die Wirkungen e, e', e'', hervor. Wie viel Zeit wird erfordert, wenn alle drei Ursachen zugleich wirken, um die Wirkung E hervor zu bringen, vorausgesetzt, daß sie auf einander keinen Einfluß haben?

Antw. Die Zeit $\frac{Ett't''}{et't''+e'tt''+e''tt'}$ Die Einheit der Zeit ist die nämliche als die, worin die Zeiten t, t', t'', gegeben sind.

In dieser letztern sind die Aufgaben 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, enthalten. Wie? —

113) Jemand hat drei Stücke Metall von gleicher Größe. Von dem ersten wiegen 5 Cubikzoll $69\frac{2}{3}$ Loth, von dem zweiten $3\frac{1}{3}$ Cubikzoll 41 Loth, und von dem dritten $4\frac{2}{7}$ Cullikzoll 91 Loth. Wenn nun diese drei Stücke zusammen $949\frac{2}{3}$ Loth wiegen, wie groß ist jedes von diesen Stücken?

Antw. 20 Cubikzoll.

114) Ein Wohlthäter wollte in einer zahlreichen Gesellschaft für einen Armen einiges Geld sammeln. Als jeder von der Gesellschaft sich zu einem Beitrage von 16 Gr. erbot, hielt der Sammler es für zu viel, indem er alsdann 10 Thlr. mehr zusammen bringen würde, als er für diesen Armen benöthigt wäre. Er machte daher den Vorschlag, daß jeder nur 10 Gr. geben sollte; da fand sich aber bei der Berechnung, daß es zu wenig sey, indem alsdann 12 Thlr. 12 Gr. an der verlangten Summe fehlen würden. Aus wie vielen Personen bestand nun die Gesellschaft? Wie viel brauchte der Arme? Und wie viel mußte jeder beitragen, um dieses Geld zusammen zu bringen?

Antw. Die Gesellschaft bestand aus 90 Personen; die Summe, welche gesammelt werden sollte, war 50 Thlr.; und der Beitrag eines jeden 13 Gr. 4 Pf.

115) Ein Kaufmann ist genöthigt, um eine dringende Schuld zu bezahlen, eine gewisse Waare auf den Einkaufspreis herabzusetzen. Wegen schlechter Buchführung kennt er aber weder das Gewicht noch den Einkaufspreis der Waare. Er erinnert sich nur so viel, daß er, wenn er das Pfund für 30 Gr. verkauft hätte, 5 Thlr. daran gewonnen, und wenn er es für 22 Gr. verkauft hätte, 15 Thlr. daran verloren haben würde. Wie groß war nach diesen Angaben das Gewicht der Waare und der Einkaufspreis?

Antw. Das Gewicht war 60 Pfund, und der Einkaufspreis 28 Gr.

116) Jemand will eine goldene Uhr ausspielen, und macht zu dem Ende eine gewisse Anzahl Loose. Giebt er das Loos für 1 Thlr. 6 Gr., so verliert er 20 Thlr., weil ihm die Uhr mehr gekostet hat, als in diesem Falle einkommen würde; giebt er aber das Loos für 1 Thlr. 16 Gr., so gewinnt er 13 Thlr. 8 Gr. Wie viel hat ihm demnach die Uhr gekostet, und wie viel Loose hat er ausgespielt?

Antw. 120 Thlr. und 18 Loose.

117) Ein Mauermeister hat zur Aufführung eines Gebäudes eine Anzahl Maurer angenommen. Er findet nach angestellter Rechnung, daß wenn er jedem Maurer täglich m Groschen geben wollte, er täglich a Groschen weniger brauchen würde, als nach dem Bauanschlag dazu bestimmt war, und daß ihm b Groschen fehlen würden, wenn er jedem n Groschen geben wollte. Wie viele Maurer hat er angenommen? Und wie groß war der bestimmte tägliche Arbeitslohn aller?

Antw. Die Anzahl der Maurer war $\frac{a+b}{n-m}$, und der tägliche Arbeitslohn $\frac{an+bm}{n-m}$ Groschen.

118) Wird eine gewisse Zahl mit m und m' multiplicirt, so erhält man zwei Produkte, welche eine gewisse andere Zahl um a und a' übertreffen. Welche Zahl ist jene erstere? und welche jene andere?

Antw. Die erste $\frac{a-a'}{m-m'}$, die andere $\frac{m'a-ma'}{m-m'}$.

Welche Werthe muß man den Buchstaben m, m', a, a', beilegen, wenn die Aufgaben 114, 115, 116, 117, unter dieser begriffen seyn sollen?

119) Es soll eine Zahl gefunden werden, welche die Eigenschaft hat, daß sie, mit 5 multiplicirt, ein Produkt giebt, welches eben so viel über 20, als die Zahl selbst unter 20 ist. Welche Zahl ist es?

Antw. $6\frac{2}{3}$.

120) Um alle meine Ausgaben bestreiten zu können, sagt jemand, müßte ich ein jährliches Einkommen von 540 Thlr. haben; hieran fehlt aber noch ein Beträchtliches. Wären meine Einkünfte $3\frac{1}{2}$ mal so groß als sie wirklich sind, so würde ich nicht allein alle meine Ausgaben bestreiten können, sondern ich würde sogar noch jährlich so viel übrig behalten, als mir jetzt fehlt. Wie hoch belaufen sich die jährlichen Einkünfte dieses Mannes?

Antw. Auf 240 Thlr.

121) Ein Copist wurde gefragt, wie viele Bogen er wöchentlich schreibe. Er antwortete: „Ich arbeite nur vier Stunden täglich, und kann daher nicht 70 Bogen liefern, wie ich wünsche. Wenn ich aber täglich 10 Stunden ar=

beiten könnte, so würde ich wöchentlich gerade so viel über 70 Bogen schreiben, als ich jetzt weniger schreibe.“ Wie viele Bogen schrieb er wöchentlich?

Antw. 40.

123) Man fragte einen Feldmesser, wie weit die beiden Pfähle von einander wären, deren Entfernung er so eben gemessen habe. Er antwortete: „Ihre Entfernung beträgt noch lange keine 1000 Fuß; denn wenn ich dieser Entfernung ihren dritten Theil zusetze, das, was herauskommt, um 176 vermehre, und hierauf mit $2\frac{1}{3}$ multiplicire, so kommt erst so viel über 1000, als jetzt noch daran fehlt.“ Wie weit waren die beiden Pfähle von einander entfernt?

Antw. 360 Fuß.

124) Es wollte jemand ein Haus kaufen, und um das dazu erforderliche Capital aufzubringen, jedem seiner Schuldner eine gleiche Summe aufkündigen. Er versuchte zu dem Ende, ob es hinlänglich wäre, wenn er jedem 250 Thlr. aufkündigte; fand aber, daß er alsdann 2000 Thlr. zu wenig erhalten würde. Er versuchte es daher mit 340 Thlr.: dies brachte ihm aber 880 Thlr. mehr als er brauchte. Wie viel Schuldner hatte er? Wie groß war das herbei zu schaffende Capital? Und wie viel muß er jedem seiner Schuldner aufkündigen?

Antw. Die Zahl seiner Schuldner ist 32, das Capital 10000 Thlr., und das, was er jedem aufzukündigen hat, $312\frac{1}{2}$ Thlr.

125) Ein Kaufmann soll in drei Terminen folgende Zahlungen leisten: 2832 Thlr. nach 3, 2560 Thlr. nach 9, und 1450 Thlr. nach 16 Monaten. Der Gläubiger wünscht

die ganze Summe von 6842 Thlr. auf einmal zu erhalten. Wann muß die Zahlung geschehen?

Antw. Nach 8 Monaten.

126) Jemand soll in vier Terminen folgende Zahlungen leisten: eine Summe a nach l, eine Summe b nach m, eine Summe c nach n, und eine Summe d nach p Monaten. Wenn er nun seine ganze Schuld $= a + b + c + d$ auf einmal entrichten will: wann muß dieses geschehen?

Antw. Nach $\frac{al + bm + cn + dp}{a + b + c + d}$ Monaten.

127) Ein Capitalist macht sich verbindlich, einem Kaufmanne 16000 Thlr. auf 15 Monat zu leihen. Da er aber diese Summe auf einmal nicht herbei zu schaffen vermag, so vereinigen sich beide Theile dahin, daß der Capitalist vorerst 5000 Thlr. hergeben solle, nach Verlauf von 6 Monaten aber noch 3000 Thlr., und dann wieder nach Verlauf von 8 Monaten die letzten 8000 Thlr. Wie lange kann nun der Kaufmann das sämmtliche Capital von 16000 Thlr. noch ferner behalten, wenn keinem von beiden Theilen Unrecht geschehen soll?

Antw. $9\frac{1}{8}$ Monat.

128) Ein Gutsherr hatte mit seinem Nachbar einen Contract geschlossen, in welchem er sich verpflichtet, 400 Ochsen seines Nachbars 16 Monat lang auf seine Weide gehen zu lassen. Der Nachbar schickte aber, mit Bewilligung des Gutsherrn, anfangs nur 200 Stück, nach 7 Monaten 250 mehr, und 8 Monate darauf wieder 150 mehr. Wie lange muß der Gutsherr diese sämmtlichen 600 Ochsen noch ferner füttern, wenn er seine eingegangene Verpflichtung erfüllen will?

Antw. $2\frac{1}{3}$ Monat.

129) Jemand erhandelt eine gewisse Waare für 4500 Thlr., welche er aber erst nach einem Jahre zu bezahlen braucht. Er wird mit dem Verkäufer eins, ihm 1500 Thlr. baar zu bezahlen, und die übrigen 3000 Thlr. in vier gleichen Terminen, jedesmal mit 750 Thlr. abzutragen: Welche Termine müssen angesetzt werden, wenn keiner von beiden Theilen darunter Schaden leiten soll.

Antw. Termine von $7\frac{1}{5}$ Monat.

130) Eine gewisse Summe ist, wie folgt, zu bezahlen: 1376 Thlr. nach 5 Monaten, 3 Monat später 2500 Thlr., und der Rest wieder 5 Monat später. Sollte die ganze Summe auf einmal entrichtet werden, so müßte es nach 10 Monaten geschehen. Wie viel war überhaupt zu bezahlen?

Antw. 7936 Thlr.

131) Jemand soll 7000 Thlr. bezahlen, nämlich: 2000 Thlr. nach $3\frac{1}{2}$, 3500 Thlr. nach 4, und 1500 Thlr. nach 14 Monaten. Sein Gläubiger macht ihm den Vorschlag, diese Summe in zwei Terminen, jedesmal die Hälfte, zu bezahlen, und zwar so, daß der zweite Termin um einen Monat länger sey als der erste. Wenn nun der Schuldner damit zufrieden ist, nach welcher Zeit muß der erste Termin angesetzt werden?

Antw. Nach $3\frac{2}{3}$ Monaten.

132) Zu einem Garten, der verkauft werden soll, melden sich zwei Kauflustige. Der eine bietet 7705 Thlr., nämlich: 3365 Thlr. baar, und 4340 Thlr. nach 8 Jahren, oder, wenn der Verkäufer es verlangt, die letztere Summe auch baar, mit 5 Procent einfachem Rabatt. Der zweite Käufer bietet eine andere Summe, welche, von jetzt an gerechnet, in drei Terminen, jeder von zwei Jahren, in gleichen

delsgeschäfte eine gewisse Summe zusammen; B legt die Hälfte mehr als A, und C 300 Thlr. mehr als A und B zusammengenommen. Nach einiger Zeit wird der auf 5020 Thlr. sich belaufende Gewinn getheilt, und C erhält für seinen Theil 2570 Thlr. Wie viel hat jeder gelegt?

Antw. A 2450, B 3675, C 6425 Thlr.

139) Drei Kaufleute, A, B, C, errichten eine Compagniehandlung. C giebt dazu 5600 Thlr. her, A aber 320 Thlr. weniger als B. A läßt sein Geld 7, B 14 und C 12 Monat in der Handlung. Der Gewinn von $2402\frac{1}{6}$ Thlr. wird nun unter die Theilnehmer nach Verhältniß der Einlage und der Zeit vertheilt; da erhält B für seinen Theil 879 Thlr. 16 Gr. Wie viel haben A und B gelegt?

Antw. A 3450, B 3770 Thlr.

140) Jemand stirbt, und hinterläßt vier Söhne und ein Vermögen von 1100 Thlr. Nach zehn Monaten wurde das Testament erst eröffnet, und in dieser Zeit hatten die Kinder ihr ganzes ererbtes Vermögen sammt den Zinsen verbraucht. Bei gleichen Ausgaben und gleichem Zinsfuß hatten einmal drei Kinder ein Capital von 1200 Thlr. in 15 Monaten aufgezehrt. Wie hoch wurden die Zinsen bei diesen beiden Capitalien gerechnet? Und wie lange werden unter gleichen Umständen sechs Kinder mit 1650 Thlr. auskommen?

Antw. Die Zinsen betrugen monatlich $\frac{2}{3}$ Procent, und 10 Monat werden die sechs Kinder auskommen.

141) Fünf Brüder haben in einem Zeitraum von 9 Monaten ein Capital von 4800 Thlr., sammt den Zinsen für diese ganze Zeit, durchgebracht. Bei gleichen Ausgaben hatten einmal zwei andere Leute ein Capital von 3320 Thlr. sammt den Zinsen in 16 Monaten durchgebracht. Der Zins-

dem Unternehmen 35262½ Thlr. gewonnen haben: wie viel gebührt nun jedem?

Antw. Dem ersten 14875, dem zweiten 11375, dem dritten 9012½ Thlr.

136) Zu einer Verlassenschaft, welche, nach Abzug gerichtlicher Kosten, sich auf 3139 Thlr. beläuft, melden sich drei Gläubiger, der eine mit einer Forderung von 2000, der andere von 2500, und der dritte von 3500 Thlr. Da nun die Verlassenschaft nicht hinreicht, diese drei Gläubiger ganz zu befriedigen, und ihre Ansprüche auch überdies nicht gleich rechtskräftig sind, so soll, nach einem gerichtlichen Ausspruche, die Masse unter die Gläubiger nach dem Verhältnisse ihrer Forderungen vertheilt werden; jedoch soll, aus dem angeführten Grunde, der zweite 10 und der dritte 25 Procent über seinen Antheil erhalten. Wie viel wird demnach jeder bekommen?

Antw. Der erste 688, der zweite 946, der dritte 1505 Thlr.

137) Die Verlassenschaft in der vorigen Aufgabe sey $=a$, die Forderungen der drei Gläubiger f, g, h; der zweite soll m und der dritte n Procent mehr erhalten als der erste. Wie viel wird jeder erhalten?

Antw. Der erste $\dfrac{100af}{100(f+g+h)+gm+hn}$,

der zweite $\dfrac{(100+m)ag}{100(f+g+h)+gm+hn}$,

der dritte $\dfrac{(100+n)ah}{100(f+g+h)+gm+hn}$ Thlr.

Wie müssen diese Formeln abgeändert werden, wenn etwa der zweite, anstatt m Procent mehr, m Procent weniger erhalten sollte?

138) Drei Personen, A, B, C, legen zu einem Han-

delsgeschäfte eine gewisse Summe zusammen; B legt die Hälfte mehr als A, und C 300 Thlr. mehr als A und B zusammengenommen. Nach einiger Zeit wird der auf 5020 Thlr. sich belaufende Gewinn getheilt, und C erhält für seinen Theil 2570 Thlr. Wie viel hat jeder gelegt?

Antw. A 2450, B 3675, C 6425 Thlr.

139) Drei Kaufleute, A, B, C, errichten eine Compagniehandlung. C giebt dazu 5600 Thlr. her, A aber 320 Thlr. weniger als B. A läßt sein Geld 7, B 14 und C 12 Monat in der Handlung. Der Gewinn von $2402\frac{1}{8}$ Thlr. wird nun unter die Theilnehmer nach Verhältniß der Einlage und der Zeit vertheilt; da erhält B für seinen Theil 879 Thlr. 16 Gr. Wie viel haben A und B gelegt?

Antw. A 3450, B 3770 Thlr.

140) Jemand stirbt, und hinterläßt vier Söhne und ein Vermögen von 1100 Thlr. Nach zehn Monaten wurde das Testament erst eröffnet, und in dieser Zeit hatten die Kinder ihr ganzes ererbtes Vermögen sammt den Zinsen verbraucht. Bei gleichen Ausgaben und gleichem Zinsfuß hatten einmal drei Kinder ein Capital von 1200 Thlr. in 15 Monaten aufgezehrt. Wie hoch wurden die Zinsen bei diesen beiden Capitalien gerechnet? Und wie lange werden unter gleichen Umständen sechs Kinder mit 1650 Thlr. auskommen?

Antw. Die Zinsen betrugen monatlich $\frac{2}{3}$ Procent, und 10 Monat werden die sechs Kinder auskommen.

141) Fünf Brüder haben in einem Zeitraum von 9 Monaten ein Capital von 4800 Thlr., sammt den Zinsen für diese ganze Zeit, durchgebracht. Bei gleichen Ausgaben hatten einmal zwei andere Leute ein Capital von 3320 Thlr. sammt den Zinsen in 16 Monaten durchgebracht. Der Zins=

fuß war beidemal derselbe. Wie viel hatte jeder monatlich verzehrt?

Antw. $110\frac{2}{3}$ Thlr.

142) Ein Bedienter erhielt von seinem Herrn jährlich 40 Thlr. und eine Livree zum Lohne. Nachdem er fünf Monat gedient hatte, forderte er seinen Abschied, und erhielt für diese Zeit die Livree und noch 6 Thlr. 4 Gr. an Geld. Wie hoch wurde die Livree gerechnet?

Antw. Zu 18 Thlr.

143) Ein Bauer hat zwei Tagelöhner, welche für gleichen Lohn bei ihm arbeiten. Dem einen gab er einmal für 56 Tage, 4 Scheffel Roggen und 14 Thlr. an Geld; dem andern für 84 Tage, $7\frac{1}{2}$ Scheffel Roggen und 17 Thlr. 6 Gr. an Geld. Wie hoch wurde der Scheffel Roggen gerechnet?

Antw. Zu 2 Thlr. 12 Gr.

144) Ein Bedienter erhielt von seinem Herrn einmal 7 Frd'or. und 16 Thlr. 22 Gr. Cour. für 7 Monat Dienstzeit und ein andermal 5 Frd'or. und 44 Thlr. 2 Gr. Cour. für 9 Monat, ohne daß sein Lohn sich geändert hätte. Wie hoch wurde der Frd'or. gerechnet?

Antw. Zu 5 Thlr. 14 Gr. Cour.

145) Ein Meister nimmt einen Gesellen an, und verspricht ihm 8 Gr. für jeden Tag, den er für ihn arbeitete; arbeitet er aber anderswo, so muß der Geselle ihm 5 Gr. für die Kost bezahlen. Nachdem 50 Tage verflossen waren, halten sie Abrechnung, und der Geselle empfängt 9 Thlr. 2 Gr. Wie viele Tage hat er demnach für seinen Meister gearbeitet?

Antw. 36.

146) Ein Bauer bringt einen Korb mit Eiern zu Markte, und bietet das Ei für 7 Pfennige aus. Ein Vorübergehender stößt zufällig mit dem Fuße daran, und zerbricht ihm dadurch 5 von seinen Eiern. Als er Ersatz erhalten, steckt er das empfangene Geld ein und beschließt, die ihm noch übrigen für 8 Pf. das Stück zu verkaufen, weil er alsdann eben so viel daraus lösen würde, als er vorher aus seiner vollen Anzahl gelöst hätte, und das eingesteckte Geld noch überdies profitiren würde. Wie viel Eier brachte der Bauer zu Markte?

Antw. 40.

147) Ein Koch, der Citronen trug, wurde gefragt, wie viel Stück es wären. Da er ein guter Rechner war, so antwortete er auf folgende räthselhaft klingende Art: „Das Dutzend von diesen Citronen kostet mir 18 Gr.; hätte ich aber die 5 noch erhalten, die ich als Zugabe verlangte, so würde mir das Dutzend $2\frac{1}{2}$ Gr. weniger gekostet haben.“ Wie viel Stück trug er also?

Antw. 31 Stück.

148) Ein Kaufmann läßt sich ein Stück Tuch kommen, und bezahlt für die Elle $2\frac{1}{4}$ Thlr. Beim Nachmessen findet er nun, daß solches zwar 5 Ellen mehr halte, als es ihm angerechnet worden, aber zugleich von so schlechter Beschaffenheit sey, daß, aus Mangel an Gelegenheit, es wieder zurück zu schicken, er sich genöthigt sieht, die Elle für 2 Thlr. zu verkaufen. Er berechnet, daß er dies nur mit einem Verluste von $13\frac{1}{3}$ Procent thun könne. Wie viele Ellen hält also das Stück?

Antw. Nach der Angabe 60, in der That aber 65.

149) Jetzt, sagt jemand, verwende ich den siebenten Theil meines Gehaltes auf das Theater, und das Uebrige

auf meine ordentlichen Ausgaben; könnte ich aber eine Gehaltzulage von 100 Thlr erhalten, so würde ich den fünften Theil meines Gehalts darauf wenden, und doch noch 40 Thlr. mehr als vorher zur Bestreitung meiner ordentlichen Ausgaben übrig behalten. Welches Gehalt hatte er?

Antw. 700 Thlr.

150) Ein Verehrer der Wissenschaften, der bis jetzt den vierten Theil seines jährlichen Gehaltes auf den Ankauf von Büchern verwendete, entschließt sich, einer erhaltenen Zulage wegen, von nun an den dritten Theil seines Einkommens darauf zu wenden, weil er berechnet, daß er, dieser Vermehrung ungeachtet, doch noch eben so viel als vorher zur Bestreitung seiner andern Ausgaben übrig behalten werde. Wie groß war demnach die erwähnte Zulage im Verhältniß mit seinem vorigen Gehalte?

Antw. Sie betrug den achten Theil davon.

151) In einer gewissen Stadt mußte ehedem jeder Hauseigenthümer den siebenten Theil seines erhaltenen Miethszinses als Zinssteuer kontribuiren; nachher wurde diese Auflage erhöhet, und er mußte den sechsten Theil abgeben. Um wie viel mußte er seine Miethsleute steigern, wenn er eben so viel als vorher übrig behalten wollte?

Antw. Um den 35sten Theil des vorigen Miethzinses.

152) Ich hatte einmal eine Summe ungezählten Geldes vor mir liegen. Von dieser Summe nahm ich zuerst den dritten Theil weg, und legte dafür 50 Thlr. zu. Einige Zeit nachher nahm ich von der so vermehrten Summe den vierten Theil weg, und legte dafür wieder 70 Thlr. zu. Ich zählte hierauf mein Geld und fand 120 Thlr. Wie viel war es anfangs?

Antw. 25 Thlr.

153) Von einer Summe Geldes wurden zuerst 50 Thlr. mehr als die Hälfte weggenommen, von dem Reste 30 Thlr. mehr als der fünfte Theil desselben, und von dem abermaligen Reste wieder 20 Thlr. mehr als der vierte Theil desselben. Am Ende blieben nur 10 Thlr. übrig. Wie groß war die Summe anfangs?

Antw. 275 Thlr.

154) Ein reicher Mann bestimmt in seinem Testamente eine gewisse Summe, die unter drei von seinen Hausleuten, wie folgt, vertheilt werden soll. Der Kammerdiener soll 200 Thlr. und dann noch die Hälfte vom Reste nehmen; von dem Uebrigen soll der Koch den fünften Theil und noch 400 Thlr. haben; den Rest, der 520 Thlr. beträgt, soll der Kutscher erhalten. Wie viel beträgt das Legat?

Antw. 2500 Thlr.

155) Ein Bauer verkauft von seinen nach der Stadt gebrachten Eiern, zuerst die Hälfte und noch 4; hierauf gehet er weiter, und verkauft wieder die Hälfte von den übrigen und noch 2 darüber. Aus Nachlässigkeit werden ihm nun 6 Eier mehr als die Hälfte gestohlen, und traurig über diesen Verlust, gehet er mit seinen noch übrigen 2 Eiern im Korbe nach seinem Dorfe zurück. Wie viel Eier hatte der Bauer nach der Stadt gebracht.

Antw. 80.

156) Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber am Ende eines jeden Jahres, zur Bestreitung seiner Ausgaben, 1000 Thlr. davon. Am Ende des dritten Jahres sieht er sich, nach Abzug der letzten 1000 Thlr., im Besitze eines doppelt so großen Vermögens als anfangs. Wie viel besaß er im Anfange?

Antw. 11100 Thlr.

157) Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um 20 Procent, nimmt aber alle Jahre zu seinem und seiner Familie Unterhalt 1000 Thlr. davon weg. Nachdem er auf diese Art seine Geschäfte drei Jahre betrieben hatte, findet er, nach Abzug der gewöhnlichen 1000 Thlr., daß sein Vermögen sich um 200 Thlr. über drei Fünftel seines angelegten Capitals vermehrt habe. Wie groß war dieses Capital?

Antw. 30000 Thlr.

158) Ein Vater bringt, um seinen Kindern eine Freude zu machen, eine Anzahl Aepfel nach Hause, und vertheilt sie, wie folgt. Dem ersten und ältesten seiner Kinder giebt er die Hälfte des ganzen Vorraths, weniger 8 Aepfel; dem zweiten die Hälfte des Restes weniger 8; eben so macht er es mit dem dritten und vierten. Dem fünften giebt er die noch übrigen 20 Aepfel. Wie viele Aepfel hatte der Vater nach Hause gebracht?

Antw. 80.

159) Ich nehme eine gewisse Zahl an, multiplicire sie mit $3\frac{3}{7}$, ziehe vom Produkte 60 ab, multiplicire den Rest mit $2\frac{1}{3}$, und ziehe hierauf 30 ab, da bleibt mir nichts übrig. Welche Zahl habe ich angenommen?

Antw. 21.

160) Ein Verschwender gab sein sehr beträchtliches Vermögen zu 4 Procent auf Zinsen. Nachdem er solches 2 Jahre hatte stehen lassen, nahm er den vierten Theil davon weg, und ließ das Uebrige 7 Monat stehen. Nach Verlauf dieser Zeit nahm er von dem Reste abermals den vierten Theil, und ließ das so verminderte Capital wieder 13 Monat stehen, worauf er sein ganzes noch übriges Vermögen zurück forderte. Er hatte in diesem Zeitraume von 44

Monnten nicht weniger als 6093¾ Thlr. an Zinsen gezogen. Wie groß war sein anfängliches Vermögen?

Antw. 50000 Thlr.

161) Ein Vater hinterläßt eine Anzahl Kinder und ein gewisses Vermögen, welches sie, wie folgt, unter sich theilen sollen. Das erste soll 100 Thlr. bekommen, und dann noch den zehnten Theil des Restes; hierauf das zweite 200 Thlr. und noch den zehnten Theil des Restes; hierauf wieder das dritte 300 Thlr. und den zehnten Theil des Restes, und überhaupt jedes folgende immer 100 Thlr. mehr als das unmittelbar vorhergehende, und noch den zehnten Theil von dem, was dann noch übrig bleibt. Am Ende findet sich, daß alle Kinder gleich viel bekommen haben. Wie groß war das hinterlassene Vermögen? Und wie viele Kinder waren vorhanden?

Antw. Das Vermögen 8100 Thlr. und 9 Kinder.

162) Wie groß müßte aber das hinterlassene Vermögen und die Anzahl der Kinder seyn, wenn das erste Kind 30 Thlr. und noch den neunten Theil des Restes, das zweite 60 Thlr. nebst dem neunten Theile des Restes, und überhaupt jedes folgende Kind 30 Thlr. mehr als das unmittelbar vorhergehende nebst dem neunten Theile des Restes haben, und doch alle gleich viel bekommen sollten?

Antw. 1920 Thlr. und 8 Kinder.

163) Wie groß müßte ferner das Vermögen und die Anzahl der Kinder seyn, wenn im Allgemeinen das erste Kind *a* Thlr. nebst dem *n*ten Theile des Restes, jedes folgende Kind aber *a* Thlr. mehr nebst dem *n*ten Theile des Restes haben sollte, und es sich am Ende fände, daß sie alle gleich viel bekommen hätten?

Antw. Das Vermögen $= (n-1)^2 a$, die Anzahl der Kinder $= n-1$.

164) Ein General wollte sein Regiment in ein Quadrat stellen. Er versuchte es auf zwei Arten. Das erstemal blieben ihm 39 Mann übrig; das zweitemal, da er die Seite des Quadrats um einen Mann vergrößerte, fehlten ihm 50 Mann, um das Quadrat voll zu machen. Wie stark war das Regiment?

Antw. 1975 Mann.

165) Jemand hat eine gewisse Anzahl Thaler, die er nach der Form eines Quadrats ordnen wollte. Bei dem ersten Versuche blieben ihm 130 Thlr. übrig; als er aber die Seite des Quadrats um 3 Thlr. vergrößerte, blieben ihm nur 31 Thlr. übrig. Wie viele Thaler hatte er?

Antw. 355.

166) Es wird eine Zahl von solcher Beschaffenheit gesucht, daß, wenn zu derselben die beiden Zahlen a und b addirt werden, der Unterschied der Quadrate dieser Summen $= d$ sey. Welche Zahl ist es?

Antw. $\frac{d-a^2+b^2}{2(a-b)}$.

Sind die beiden vorhergehenden Aufgaben in dieser begriffen?

167) Man soll die Größe dreier Weinfässer aus den folgenden Angaben bestimmen. Wenn man das erste leere Faß aus dem zweiten vollen Fasse füllt, so bleibt im zweiten nur $\frac{2}{5}$ des Weines zurück; füllt man das zweite leere Faß aus dem dritten vollen Fasse, so bleibt im dritten nur $\frac{1}{4}$ des Weins zurück; wollte man aber das dritte leere Faß aus dem ersten vollen Fasse füllen, so würden 50 Quart

fehlen. Wie viel Quart hält nun jedes von diesen drei Fässern.

Antw. Das erste 50, das zweite 90, das dritte 120 Quart.

168) Jemand hat vier Weinfässer von verschiedener Größe. Füllt er das zweite leere Faß aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten nur $\frac{4}{7}$ des Weines zurück; füllt er das dritte leere Faß aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten nur $\frac{1}{4}$ des Weines zurück; füllt er das vierte leere Faß aus dem dritten vollen, so wird nur $\frac{9}{16}$ des vierten gefüllt; wollte er aber das dritte und vierte leere Faß aus dem ersten vollen füllen, so würden nicht allein diese gefüllt, sondern es bleiben ihm noch 15 Quart übrig. Wie viel Quart hält jedes von diesen vier Fässern?

Antw. Das erste 140, das zweite 60, das dritte 45, und das vierte 80 Quart.

XVI. Aufgaben für die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Grössen.

1) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe 70, und deren Differenz 16 ist. Welche Zahlen sind es?

Antw. 43 und 27.

2) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe $= a$ und deren Differenz $= b$ ist. Wie werden diese Zahlen ausgedrückt?

Antw. Die eine ist $= \frac{a+b}{2}$, die andere $= \frac{a-b}{2}$.

3) Zwei Geldbeutel enthalten zusammen 300 Thlr.

Nimmt man aus dem ersten 30 Thlr. heraus, und legt sie in den zweiten, so ist in beiden gleich viel. Wie viel enthält jeder?

Antw. Der erste 180, der zweite 120 Thlr.

4) A sagt zu B: gieb mir 100 Thlr., so habe ich so viel als Du. Nein sagt B zu A, gieb Du mir lieber 100 Thlr., so habe ich gar doppelt so viel als Du. Wie viel hat jeder?

Antw. A 500, B 700 Thlr.

5) Jemand hat zwei Tabatieren. Legt er 8 Thlr. in die erste, so ist sie erst halb so viel werth als die andere. Nimmt er aber diese 8 Thlr. aus der ersten wieder heraus und legt sie in die zweite, so ist diese dreimal so viel werth als jene. Wie viel ist jede werth?

Antw. Die erste 24, die zweite 64 Thlr.

6) A und B besitzen zusammen ein Vermögen von 570 Thlr. Wäre das Vermögen des A dreimal, und das Vermögen des B fünfmal so groß als jedes wirklich ist, so würden sie zusammen 2350 Thlr. besitzen. Wie viel hat jeder?

Antw. A 250, B 320 Thlr.

7) Es werden zwei Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht. Wenn man die eine mit 2, die andre mit 5 multiplicirt, und beide Produkte addirt, soll die Summe 31 seyn; multiplicirt man hingegen die erste mit 7, die zweite mit 4, und addirt beide Produkte zusammen, so soll man 68 bekommen. Welche Zahlen sind es?

Antw. Die erste ist 8, die zweite 3.

8) Wird die eine zweier Zahlen mit a, die andere mit b multiplicirt, so ist die Summe der Produkte $= k$; wird

fehlen. Wie viel Quart hält nun jedes von diesen drei Fässern.

Antw. Das erste 50, das zweite 90, das dritte 120 Quart.

168) Jemand hat vier Weinfässer von verschiedener Größe. Füllt er das zweite leere Faß aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten nur $\frac{4}{7}$ des Weines zurück; füllt er das dritte leere Faß aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten nur $\frac{1}{4}$ des Weines zurück; füllt er das vierte leere Faß aus dem dritten vollen, so wird nur $\frac{9}{16}$ des vierten gefüllt; wollte er aber das dritte und vierte leere Faß aus dem ersten vollen füllen, so würden nicht allein diese gefüllt, sondern es bleiben ihm noch 15 Quart übrig. Wie viel Quart hält jedes von diesen vier Fässern?

Antw. Das erste 140, das zweite 60, das dritte 45, und das vierte 80 Quart.

XVI. Aufgaben für die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Grössen.

1) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe 70, und deren Differenz 16 ist. Welche Zahlen sind es?

Antw. 43 und 27.

2) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe $= a$ und deren Differenz $= b$ ist. Wie werden diese Zahlen ausgedrückt?

Antw. Die eine ist $= \frac{a+b}{2}$, die andere $= \frac{a-b}{2}$.

3) Zwei Geldbeutel enthalten zusammen 300 Thlr.

sehe ich mich im Stande, meine Schulden zu bezahlen. B erwiederte: Meine Schulden könnten erst getilgt werden, wenn du mir den sechsten Theil des Deinigen leihen wolltest. Wie groß ist das Vermögen eines jeden?

Antw. Das Vermögen des A ist 900, und das Vermögen des B 2400 Thlr.

14) Ein Capitalist nimmt 8000 Thlr. unter vortheilhaften Bedingungen auf, weil er Gelegenheit hat, 23,000 Thlr. zu höheren Procenten unterzubringen, und er hat einen Ueberschuß von 905 Thlr. an jährlichen Zinsen. Unter den nämlichen Bedingungen nimmt er einerseits 9400 Thlr. auf, und verleihet andererseits 17500 Thlr.; dies bringt ihm einen Ueberschuß von $539\frac{1}{2}$ Thlr. an jährlichen Zinsen. Zu welchen Procenten hat er Geld aufgenommen und ausgeliehen?

Antw. Zu $4\frac{1}{2}$ und $5\frac{1}{2}$ Procent.

15) Jemand hat zwei große Stücke Eisen, deren Gewicht gesucht wird. Man weiß, daß $\frac{2}{3}$ des ersten Stückes 96 Pfund weniger als $\frac{3}{4}$ des andern Stückes, und $\frac{5}{6}$ des andern Stückes gerade so viel als $\frac{4}{9}$ des ersten wiegen. Wie viel wiegt jedes von diesen beiden Stücken?

Antw. Das erste wiegt 720, das zweite 512 Pfund.

16) Ein Wasserbehälter von 210 Eimer kann durch zwei Oeffnungen gefüllt werden. Man hat durch einen Versuch, bei welchem die erste 4, und die zweite 5 Stunden offen war, 90 Eimer Wasser erhalten. Durch einen andern Versuch, bei welchem die erste Oeffnung 7, und die andre $3\frac{1}{2}$ Stunden offen war, erhielt man 126 Eimer. Wie viel Eimer giebt jede Oeffnung in einer Stunde? Und in welcher Zeit wird der Behälter voll werden, wenn das Wasser durch beide Oeffnungen zugleich einfließt?

Antw. Die erste Oeffnung giebt 15, und die zweite 6 Eimer; 10 Stunden werden zur Füllung des Behälters erfordert.

17) Ein Wiener hat 500 Stück Siebzehner und Siebner; ihr Werth beträgt 112 Fl. 40 Kr. Wie viele Stücke hat er von jeder Art?

Antw. 326 Siebzehner, 174 Siebner.

18) Jemand hat zweierlei Waare. 8 Pfund von der ersten und 19 Pfund von der zweiten, kosten zusammen 18 Thlr. 5 Gr.; ferner kosten 20 Pfund von der ersten und 16 Pfund von der zweiten zusammen 25 Thlr. 20 Gr. Wie viel kostet das Pfund einer jeden Waare?

Antw. 19 Gr. und 15 Gr.

19) 15 Schlesische und 33 Leipziger Ellen machen zusammen so viel als $39\frac{1}{2}$ Brabanter Ellen; ferner 24 Schlesische und 55 Leipziger Ellen zusammen so viel als 65 Brabanter Ellen. Wie verhält sich nach diesen Angaben die Schlesische und die Leipziger Elle zur Brabanter? Wie verhält sich ferner die Schlesische zur Leipziger Elle? Und um wie viel Procent differiren diese beiden letzteren?

Antw. Die Schlesische Elle verhält sich zur Brabanter wie 5 zu 6, die Leipziger zur Brabanter wie 9 zu 11, die Schlesische zur Leipziger wie 55 zu 54, und $1\frac{23}{27}$ Procent ist die Schlesische Elle länger als die Leipziger.

20) $17\frac{1}{2}$ Danziger und 19 Berliner Fuß machen zusammen so viel als $34\frac{3}{4}$ Rheinländische Fuß; ferner, 5 Danziger und $9\frac{1}{2}$ Berliner Fuß so viel als $13\frac{53}{56}$ Rheinländische. Wie verhält sich nach diesen Angaben der Danziger und der Berliner Fuß zum Rheinländischen? Wie der Danziger zum Berliner Fuß? Und um wie viel Procent differiren diese beiden letztern?

Antw. Der Danziger Fuß verhält sich zum rheinländischen wie 32 zu 35, der Berliner zum rheinländschen wie 75 zu 76, der Danziger zum Berliner wie 2432 zu 2625, und der Berliner ist um $7\frac{569}{608}$, oder ungefähr um $7\frac{14}{15}$ Procent länger als der Danziger.

21) 40 französische Meilen betragen, wenn sie auf geographische oder deutsche Meilen reducirt werden, $12\frac{1}{2}$ solcher Meilen mehr als 53 englische. 10 französische und $26\frac{1}{2}$ englische Meilen machen zusammen so viel als $11\frac{3}{4}$ deutsche Meilen. Wie verhält sich nach diesen Angaben die französische und englische Meile zur deutschen? Und wie die französische zur englischen?

Antw. Die französische Meile verhält sich zur deutschen wie 3 zu 5, die englische zur deutschen wie 23 zu 106, und die französische zur englischen wie 318 zu 115.

22) Jemand verwechselte 250 Friedrichsd'or gegen Dukaten, und erhielt dafür 439 Dukaten und noch 14 Gr. Zu den nämlichen Coursen verwechselte er noch 160 Friedrichsd'or, und erhielt dafür 281 Dukaten und 6 Gr. heraus. Wie hoch wurde jede Goldmünze gerechnet?

Antw. Der Friedrichsd'or zu 5 Thlr. 10 Gr., und der Dukaten zu 3 Thlr. 2 Gr.

23) Ein Reisender sagte: „Ich bin durch Deutschland, Frankreich und England gereist, und habe in diesen drei Ländern eine Summe von 8325 Thlr. verzehrt; nämlich: in Deutschland 1520 Thaler, in Frankreich 7540 Franken, und in England 820 Pfund Sterling." Als man ihn hierauf nach dem dieser Rechnung zum Grunde liegenden Werth der fremden Geldsorten fragte, gab er zur Antwort, daß 5 Pfund Sterling 3 Thlr. mehr als 108 Franken betragen. Wie hoch hat er jede Münzsorte gerechnet?

Antw. Das Pfund Sterling zu 6 Thlr. und den Franken zu 6 Gr.

24) Jemand hat zwei Pferde, und dazu zwei Sättel, von welchen der eine 50, und der andere 2 Thlr. kostet. Legt er den bessern auf das erste, und den schlechtern auf das zweite Pferd, so ist dieses 8 Thlr. weniger werth als jenes. Legt er aber den schlechtern Sattel auf das erste, und den bessern auf das zweite Pferd, so ist dieses $3\frac{2}{3}$ mal so viel werth als jenes. Wie theuer ist jedes Pferd?

Antw. Das erste 30, das zweite 70 Thlr.

25) Es giebt einen Bruch, der so beschaffen ist, daß, wenn zum Zähler 1 addirt wird, der Werth desselben $=\frac{1}{3}$, und wenn zum Nenner 1 addirt wird, der Werth desselben $=\frac{1}{4}$ ist. Welcher Bruch ist es?

Antw. $\frac{4}{15}$.

26) Es wird ein Bruch gesucht, der so beschaffen ist, daß er sich, wenn vom Zähler und Nenner 3 subtrahirt wird, in $\frac{1}{4}$, und wenn zum Zähler und Nenner 5 addirt wird, in $\frac{1}{2}$ verwandelt. Welcher Bruch ist es?

Antw. $\frac{7}{15}$.

27) B hat 12600 Thlr. mehr als A ausgeliehen und sein Geld um 1 Procent höher untergebracht, weshalb er auch an jährlichen Zinsen 730 Thlr. mehr ziehet. C hat 3000 Thlr. mehr ausgeliehen als A, und auch zu 2 Procent höheren Zinsen, ziehet dafür auch jährlich 380 Thlr. mehr an Zinsen als A. Wie viel hat jeder ausgeliehen? Und zu welchen Procenten?

Antw. A hat 10000, B 22600, C 13000 Thlr. ausgeliehen; A zu 4, B zu 5 und C zu 6 Procent.

28) Eine Gesellschaft verzehrte in einem Gasthause eine gewisse Summe, und zwar einer so viel als der andere.

Wären 5 Personen mehr gewesen, und hätte jeder 3 Gr. mehr verzehrt, so hätte die Zeche 6 Thlr. 13 Gr. mehr betragen; wären aber 3 Personen weniger gewesen, und hätte jeder 2 Gr. weniger verzehrt, so hätte sie 3 Thlr. 10 Gr. weniger betragen. Wie stark war die Gesellschaft und wie viel verzehrte jeder?

Antw. Die Gesellschaft bestand aus 14 Personen, und jeder verzehrte 20 Gr.

29) Ein Werk soll so gedruckt werden, daß auf jede Seite eine bestimmte Anzahl Zeilen, und in jede Zeile eine bestimmte Anzahl Buchstaben kommen. Wollte man auf die Seite drei Zeilen mehr, und in die Zeile vier Buchstaben mehr bringen, so würde sie 224 Buchstaben mehr enthalten als vorher; wollte man aber auf die Seite zwei Zeilen weniger, und in die Zeile drei Buchstaben weniger bringen, so würden auf die Seite 145 Buchstaben weniger kommen. Wie viele Zeilen sollten nun auf die Seite, und wie viele Buchstaben in jede Zeile gebracht werden?

Antw. 29 Zeilen und 32 Buchstaben.

30) Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, welche so beschaffen sind, daß, wenn die eine um a, die andere um b vermehrt wird, das Produkt dieser beiden Summen das Produkt der beiden Zahlen selbst um c übertreffe; wenn hingegen die eine um a', die andere um b' vermehrt wird, das Produkt dieser Summen das Produkt der Zahlen selbst um c' übertreffe. Wie werden diese Zahlen ausgedrückt?

Antw. Sie sind $\frac{a'c - ac' + aa'(b' - b)}{a'b - ab'}$,

$$\frac{bc' - b'c + bb'(a - a')}{a'b - ab'}.$$

Sind die drei vorhergehenden Aufgaben in dieser begriffen? Und welche Werthe müssen den Buchstaben $a, b,$

c, a', b', c', beigelegt werden, wenn dadurch jene Aufgaben aufgelöst werden sollen?

31) Es ist nicht lange her, sagt jemand, wo der Scheffel Weizen 1 Thlr. und der Scheffel Roggen 21 Gr. wohlfeiler war als jetzt; damals verhielt sich der Preis des Weizens zum Preise des Roggens wie 10 zu 7; jetzt ist dieses Verhältniß wie 4 zu 3. Wie theuer ist der Scheffel von jeder Getreideart?

Antw. Der Scheffel Weizen kostet 3 Thlr. 12 Gr., der Scheffel Roggen 2 Thlr. 15 Gr.

32) Jemand hat zwei Fässer, und in jedem eine gewisse Quantität Wein. Um in beiden gleich viel zu bekommen, gießt er aus dem ersten Fasse so viel in das zweite als schon darin ist, gießt hierauf wieder aus dem zweiten in das erste so viel als nun darin ist, und endlich wieder aus dem ersten in das zweite so viel als noch darin übrig ist. Am Ende hat er in jedem Fasse 16 Quart Wein. Wie viel Quart waren anfangs darin?

Antw. In dem ersten 22, in dem zweiten 10 Quart.

33) Wenn in der vorigen Aufgabe in jedem Fasse zuletzt a Quart seyn sollen: wie viel Quart müssen anfangs darin gewesen seyn?

Antw. In dem ersten $\frac{11}{8}a$, in dem zweiten $\frac{5}{8}a$ Quart.

34) Ein Weinhändler hat zweierlei Wein. Vermischt er 3 Quart des bessern mit 5 Quart des schlechtern, so kann er das Quart für 20 Gr. 6 Pf. verkaufen. Vermischt er aber $3\frac{3}{4}$ Quart des bessern mit $7\frac{1}{2}$ Quart des schlechtern, so kann er das Quart gerade für 20 Gr. verkaufen. Was kostet das Quart einer jeden Sorte?

Antw. Das Quart des bessern Weines 28 Gr., das Quart des schlechtern 16 Gr.

35) Es gebe im Allgemeinen a Quart des ersten Weines mit b Quart des zweiten vermischt einen Mittelpreis von c Groschen; ferner f Quart des ersten mit g Quart des zweiten vermischt einen Mittelpreis von h Groschen. Was kostet das Quart einer jeden Sorte?

Antw. Der Preis des ersten ist $\frac{(a+b)cg-(f+g)bh}{ag-bf}$, der Preis des zweiten $\frac{(a+b)cf-(f+g)ah}{bf-ag}$ Groschen.

36) 37 Pfund Zinn verlieren im Wasser 5 Pfund *), und 23 Pfund Blei verlieren im Wasser 2 Pfund; eine Composition von Zinn und Blei, 120 Pfund wiegend, verliert im Wasser 14 Pfund. Wie viel Zinn und Blei ist in dieser Composition?

Antw. 74 Pfund Zinn und 46 Pfund Blei.

37) 21 Pfund Silber verlieren im Wasser 2 Pfund, und 9 Pfund japanisches Kupfer verlieren im Wasser 1 Pfund. Wenn nun eine Composition von Silber und Kupfer, 148 Pfund wiegend, $14\frac{2}{3}$ Pfund im Wasser verliert: wie viel Silber und Kupfer befindet sich darin?

Antw. 112 Pfund Silber und 36 Pfund Kupfer.

38) Ein gegebenes Stück Metall, das p Pfund wiegt, verliert im Wasser a Pfund. Dieses Stück ist aber aus zwei andern Metallen, die A und B heißen mögen, zusammengesetzt, von denen bekannt ist, daß p Pfund von A im Wasser b Pfund, und p Pfund von B im Wasser c Pfund verlieren. Wie viel von jedem Metalle befindet sich in dem gegebenen Stücke?

---

*) Die Erklärung von dem, was dies heißt, ist leicht zu geben, und wird dem Lehrer überlassen.

Antw. $\frac{(c-a)p}{c-b}$ Pfund von A, und $\frac{(a-b)p}{c-b}$ Pfund von B.

39) Nach Vitruv's Erzählung war die Krone des Königs Hiero von Syrakus 20 Pfund schwer, und verlor im Wasser nahe an $1\frac{1}{4}$ Pfund. Nehmen wir nun an, daß sie bloß aus Gold und Silber bestand, und daß 19,64 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund, und 10,5 Pfund Silber im Wasser ebenfalls 1 Pfund verliert: wie viel Gold und wie viel Silber mußte diese Krone enthalten?

Antw. An Gold 14,77..., und an Silber 5,22... Pfund.

Ist diese Aufgabe in der vorigen begriffen? Und was muß hier für p, a, b, c, angenommen werden?

40) Das Blei ist 11,324 mal schwerer als Wasser; das Korkholz wiegt nur 0,24 mal so viel als Wasser; das Tannenholz hingegen wiegt 0,45 mal so viel als Wasser. Man will nun ein Stück Blei mit einem Stücke Korkholz so verbinden, daß dadurch ein Körper entstehe, der 80 Pfund wiegt und gerade so schwer ist als ein Stück Tannenholz von gleicher Größe (also schwimmen könne). Wie viel Blei und Korkholz muß mit einander verbunden werden?

Antw. 38,14... Pfund Blei mit 41,85... Pfund Korkholz.

41) Zwei verschiedenartige Stoffe, von welchen der eine p mal und der andere p' mal so schwer als Wasser ist, sollen so mit einander verbunden werden, daß der daraus entstandene Körper im Durchschnitt genommen, p'' mal so schwer als Wasser sey, und q Pfund wiege. Wie viel Pfund muß dazu von jedem Stoffe genommen werden?

Antw. $\frac{qp(p'-p'')}{p''(p'-p)}$ von dem ersten, und $\frac{qp'(p''-p)}{p''(p'-p)}$ von dem zweiten Stoffe.

Zwischen welchen Grenzen muß also p'' liegen, wenn die Aufgabe, so wie sie hier vorgetragen worden, möglich seyn soll?

42) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz, Summe und Produkt sich gegen einander wie die Zahlen 2, 3, 5 verhalten, d. h. deren Differenz sich zu ihrer Summe wie 2 zu 3, und deren Summe sich zu ihrem Produkte wie 3 zu 5 verhält. Welche Zahlen sind es?

Antw. 2 und 10.

43) Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, deren Summe m mal, und deren Produkt n mal so groß als ihre Differenz ist. Welche Zahlen sind es?

Antw. $\frac{2n}{m-1}$, $\frac{2n}{m+1}$.

44) Die Summe zweier Zahlen soll 13, und der Unterschied ihrer Quadrate 39 seyn. Welche Zahlen sind es?

Antw. 5 und 8.

45) Die Summe zweier Zahlen soll $=a$, die Differenz ihrer Quadrate $=b$ seyn. Welche Zahlen sind es?

Antw. $\frac{a^2+b}{2a}$, $\frac{a^2-b}{2a}$.

46) Die Summe zweier Zahlen soll $=a$, der Quotient, welcher entstehet, wenn die eine durch die andere dividirt wird, $=b$ seyn. Welche Zahlen sind es?

Antw. $\frac{a}{b+1}$, $\frac{ab}{b+1}$.

47) Es wurde jemand nach seinem und seines Vaters und Großvaters Alter gefragt. Er antwortete: „Mein

und meines Vaters Alter beträgt zusammen 56 Jahre, meines Vaters und Großvaters zusammen 100, mein und meines Großvaters Alter zusammen 80 Jahre." Wie alt ist nun jeder?

Antw. Er selbst 18, sein Vater 38 und sein Großvater 62 Jahre.

48) Die Summen dreier Zahlen, paarweise genommen, sollen a, b, c, seyn. Welche sind es?

Antw. $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a+c-b}{2}$, $\frac{b+c-a}{2}$.

49) A, B, C, sind zusammen 2190 Thlr. schuldig; keiner kann diese Summe allein bezahlen. Wenn sie sich aber vereinigen, so kann es etwa auf nachstehende Art geschehen, wenn B $\frac{3}{7}$ seines Vermögens zum ganzen Vermögen des A legt, oder, wenn C $\frac{5}{9}$ seines Vermögens zu dem des B legt, oder, wenn A $\frac{2}{3}$ seines Vermögens zu dem des C legt. Wie viel besitzt demnach jeder?

Antw. A 1530, B 1540, und C 1170 Thlr.

50) A und B besitzen zusammen nur $\frac{2}{3}$ von dem Vermögen eines dritten C; B und C haben zusammen 6 mal so viel als A; wäre B um 680 Thlr. reicher als er wirklich ist, dann würde er so reich als A und C zusammen seyn. Wie reich ist jeder?

Antw. A hat 200, B 360, und C 840 Thlr.

51) Ich habe drei Geldbeutel vor mir stehen, in deren jedem sich eine gewisse Summe Geldes befindet. Nehme ich aus dem ersten Beutel 20 Thlr., und lege sie dem zweiten zu, so ist in diesem viermal so viel Geld als in jenem noch übrig ist. Nehme ich aus dem zweiten Beutel 60 Thlr., und lege sie dem dritten zu, so ist in diesem $1\frac{3}{4}$ mal so viel als in jenem noch übrig bleibt. Nehme ich hingegen aus

dem dritten 40 Thlr. und lege sie dem ersten zu, so bleibt im dritten doch noch $2\frac{7}{8}$ mal so viel als im ersten nach der Zulage seyn wird. Wie viel befindet sich in jedem Beutel?

Antw. Im ersten 120, im zweiten 380 und im dritten 500 Thlr.

52) A, B, C vergleichen ihr Vermögen. A sagt zu B: Gieb mir 700 Thlr. von deinem Gelde, so habe ich zweimal so viel als du behältst. B sagt zu C: Gieb mir 1400 Thlr., so habe ich dreimal so viel als du behältst. C sagt zu A: Gieb mir 420 Thlr., so habe ich fünfmal so viel als du behältst. Wie viel hat jeder?

Antw. A 980, B 1540, C 2380 Thlr.

53) Es werden drei Zahlen von der folgenden Beschaffenheit gesucht. Wenn man von der ersten 4 abzieht, und eben so viel der zweiten zusetzt, so verhält sich der Rest zur Summe wie 1 zu 2. Zieht man von der zweiten 10 ab, und setzt der dritten eben so viel zu, so verhält sich der Rest zur Summe wie 3 zu 10. Ziehet man aber von der ersten 5 ab, und setzt diese der dritten zu, so verhält sich der Rest zur Summe wie 3 zu 11. Welche Zahlen sind es?

Antw. 20, 28, 50.

54) A, B, C haben zusammen 1820 Thlr. Giebt B dem A 200 Thlr. von seinem Gelde, so hat A 160 Thlr. mehr als B; erhält aber B von C 70 Thlr., so haben beide gleich viel. Wie viel hat jeder?

Antw. A 400, B 640, C 780 Thlr.

55) Drei Personen haben zusammen eine gewisse Summe verzehrt; keiner aber ist im Stande, sie allein zu bezahlen. A sagt daher zu B: Gieb mir den vierten Theil deines Geldes, so kann ich sie allein bezahlen. B sagt zu C: Gieb mir den achten Theil deines Geldes, so kann ich sie eben=

falls bezahlen. Darauf sagt C zu A: Auch ich kann sie bezahlen, wenn ich von dir die Hälfte deines Geldes erhalte, ob ich gleich nur 4 Thlr. besitze. Wie viel haben sie verzehrt? Und wie viel hat A und B?

Antw. Verzehrt wurde $6\frac{1}{2}$ Thlr.; A hat 5 und B 6 Thlr.

56) Jemand hat drei Stücke Silber von ungleichem Gehalte, nämlich 15, 10 und 9 löthiges. Schmelzt man das 15 und 10 löthige zusammen, so entsteht daraus ein Silber, dessen Gehalt $11\frac{2}{3}$ Loth ist. Von dem nämlichen Gehalte wird auch das Silber seyn, welches entsteht, wenn man das 15 und 9 löthige zusammenschmelzt. Alle drei Stücke wiegen zusammen 34 Mark. Wie viel wiegt jedes Stück besonders?

Antw. Das 15 löthige wiegt 8, das 10 löthige 16, und das 9 löthige 10 Mark.

57) Jemand bezahlt eine Summe von 67 Thlr. 6 Gr. mit 5 Dukaten, 7 Frd'or und 2 Carolin; eine Summe von 113 Thlr. 14 Gr. mit 4 Dukaten, 9 Frd'or. und 8 Carolin; ferner eine Summe von 96 Thlr. mit 12 Dukaten, 6 Frd'or. und 4 Carolin. Wie hoch wurden diese Goldstücke gerechnet, wenn sie bei allen Zahlungen denselben Cours hatten?

Antw. Der Dukaten zu 3 Thlr. 2 Gr., der Frd'or. zu 5 Thlr. 14 Gr., und der Carolin zu 6 Thlr. 9 Gr.

58) Jemand hat drei Magazine, deren jedes dreierlei Getreide enthält, nämlich Weizen, Roggen und Gerste. Das erste Magazin enthält 8 Wispel Weizen, 3 Wispel Roggen und 5 Wispel Gerste; das zweite 3 Wispel Weizen, 10 Wispel Roggen und 7 Wispel Gerste; das dritte 6 Wispel Weizen, 9 Wispel Roggen und 13 Wispel Gerste. Der Werth des ersten Magazins ist 734 Thlr., der Werth des

zweiten 812 Thlr., und der Werth des dritten 1130 Thlr. Wie hoch wurde der Wispel von jeder Getreideart gerechnet?

Antw. Der Wispel Weizen zu 56, der Wispel Roggen zu 42, und der Wispel Gerste zu 32 Thlr.

59) A, B, C kaufen Kaffee, Zucker und Thee zu denselben Preisen. A bezahlt 11 Thlr. 15 Gr. für $7\frac{1}{2}$ Pfund Kaffee, 3 Pfund Zucker und $2\frac{1}{4}$ Pfund Thee; B bezahlt 16 Thlr. 6 Gr. für 9 Pfund Kaffee, 7 Pfund Zucker und 3 Pfund Thee; C bezahlt 12 Thlr. 6 Gr. für 2 Pfund Kaffee, $5\frac{1}{2}$ Pfund Zucker und 4 Pfund Thee. Was kostet das Pfund von jedem?

Antw. Vom Kaffee 18 Gr., vom Zucker 12 Gr. und vom Thee 2 Thlr.

60) Drei Maurer, A, B, C, sollen eine Mauer aufführen. A und B würden gemeinschaftlich diese Mauer in 12 Tagen vollenden; B und C würden erst in 20 Tagen damit fertig werden; aber A und C werden in 15 Tagen fertig. Wie viel Zeit wird jeder einzeln dazu brauchen? Und in welcher Zeit werden sie damit zu Stande kommen, wenn sie alle drei gemeinschaftlich arbeiten?

Antw. A braucht 20, B 30 und C 60 Tage; alle drei zusammen brauchen 10 Tage.

61) Zu einer gewissen Arbeit werden drei Arbeiter angenommen. A und B würden diese Arbeit gemeinschaftlich in a Tagen vollenden; A und C brauchen b Tage, B und C aber c Tage. Wie viel Zeit wird jeder einzeln dazu brauchen, vorausgesetzt, daß unter allen Umständen jeder gleich viel arbeite? Und in welcher Zeit werden sie damit zu Stande kommen, wenn sie alle drei gemeinschaftlich arbeiten?

Antw. A braucht $\frac{2abc}{bc+ac-ab}$ Tage, B braucht $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$ Tage, und C braucht $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ Tage. Gemeinschaftlich brauchen sie $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$ Tage.

62) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren, A, B, C, gefüllt werden. Durch die Röhren A und B könnte es in 70 Minuten, durch die Röhren A und C in 84 Minuten, und durch die Röhren B und C in 140 Minuten geschehen. Wie viel Zeit braucht jede Röhre für sich dazu? Und in welcher Zeit wird der Behälter voll werden, wenn das Wasser durch alle drei Röhren zugleich einfließt?

Antw. A braucht 105, B 210, C 420 Minuten; alle drei Röhren zusammen erfordern eine Stunde.

Ist diese Aufgabe auch unter der 61sten begriffen? Und wie müßte zu dem Ende in der letztern, wenn sie ganz passen soll, der Vortrag abgeändert werden?

63) Jemand hat drei Stücke Metall, deren jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht. Das erste Stück enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber und 30 Loth Kupfer; das zweite enthält 20 Loth Gold, 28 Loth Silber und 48 Loth Kupfer; das dritte enthält 12 Loth Gold, 39 Loth Silber und 24 Loth Kupfer. Nun will er von jedem etwas hinweg nehmen, und alles zu einer Masse schmelzen, um dadurch eine Composition von 10 Loth Gold, 23 Loth Silber und 26 Loth Kupfer hervorzubringen. Wie viel muß er von jedem Stücke dazu nehmen?

Antw. Von dem ersten 10, von dem zweiten 24, und von dem dritten 25 Loth.

64) Drei Soldaten, A, B, C, erbeuteten bei einem Gefechte zusammen 96 Thlr., welche sie, wegen des gleichen

Antheils an der Gefahr, auch gleich unter sich theilen wollen. Zu dem Ende giebt A, dem das Meiste in die Hände gefallen war, so viel an B und C, als jeder schon hat; auf die nämliche Art theilt hierauf B mit A und C, und hernach C mit A und B. Wenn nun auf diese Art die beabsichtigte Theilung wirklich bewerkstelligt worden ist: wie viel mußte jeder Soldat erbeutet haben?

Antw. A 52, B 28, C 16 Thlr.

65) In den drei Fächern meines Schrankes befindet sich insgesammt eine Summe von 192 Thlr., die sehr ungleich vertheilt ist. Um in alle Fächer eine gleiche Summe zu bringen, nehme ich aus dem ersten Fache so viel als nöthig ist, und lege in jedes der beiden andern die Hälfte von dem, was sie schon enthalten. Hierauf nehme ich aus dem zweiten und hernach aus dem dritten Fache, und lege jedesmal den beiden andern Fächern die Hälfte von dem zu, was sie schon enthalten. Wenn ich nun hierdurch wirklich meinen Zweck erreicht hätte: wie viel muß anfangs in jedem Fache gewesen seyn?

Antw. Im ersten 70, im zweiten 52, und im dritten 40 Thlr.

66) A, B, C spielen Pharao. Im ersten Spiele hat A die Bank; B und C setzen den dritten Theil ihres Geldes und gewinnen. Im zweiten Spiele hält B die Bank; A und C setzen den dritten Theil ihres Geldes und gewinnen ebenfalls. Nun übernimmt C die Bank; A und B setzen den dritten Theil ihres Geldes, und auch hier verliert der Banquier. Nach dem dritten Spiele zählen sie ihr Geld, und finden, daß sie alle gleich viel haben, nämlich jeder 64 Dukaten. Wie viel mußten sie vor dem Spiele gehabt haben?

Antw. A 75, B 63, C 54 Dukaten.

7 zu 11; subtrahirt man aber 36 von der zweiten und dritten, so verhalten sich die Reste wie 6 zu 7. Welche Zahlen sind es?

Antw. 30, 48, 50.

73) Eine gewisse Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben, die in arithmetischer Proportion stehen. Wird diese Zahl mit der Summe ihrer Ziffern an sich (d. h. ohne auf den Werth zu sehen, welchen sie durch ihre Stellen erhalten,) dividirt, so ist der Quotient 48; zieht man aber von dieser Zahl 198 ab, so erhält man eine Zahl, welche die nämlichen Ziffern als die gesuchte, aber in umgekehrter Ordnung enthält. Welche Zahl ist es?

Antw. 432.

XVII. Aufgaben für die Gleichungen des zweiten Grades mit einer und mit mehreren unbekannten Grössen.

1) Welche Zahl ist es, deren Hälfte mit ihrem dritten Theile multiplicirt 864 giebt?

Antw. 72.

2) Welche Zahl ist es, deren siebenter und achter Theil mit einander multiplicirt, und das Produkt durch 3 dividirt, zum Quotienten $298\frac{2}{3}$ giebt?

Antw. 224.

3) Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man dieselbe erst zu 94 addirt, hernach von 94 subtrahirt, und hierauf diesen Rest mit jener Summe multiplicirt, das Produkt 8512 sey. Welche Zahl ist es?

Antw. 18.

4) Was für zwei Zahlen sind es, welche mit einander
ltiplicirt, das Produkt 750, und durch einander dividirt,
ı Quotienten $3\frac{1}{3}$ geben?

Antw. 50 und 15.

5) Das Produkt zweier Zahlen soll $= a$, ihr Quotient
b seyn. Durch welche Formeln werden sie gegeben?

Antw. Durch $\sqrt{ab}$ und $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

6) Welche zwei Zahlen sind es, deren Quadrate, wenn
addirt werden, die Summe 13001, wenn sie aber von
ıander subtrahirt werden, den Rest 1449 geben?

Antw. 85 und 76.

7) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen soll $= a$,
: Differenz dieser Quadrate $= b$ seyn. Welche Formeln
ben diese Zahlen?

Antw. $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$, $\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.

8) Welche Zahlen stehen in dem Verhältnisse von 3
4, und geben für die Summe ihrer Quadrate die Zahl
24900?

Antw. 342, 456.

9) Welche Zahlen haben das Verhältniß m zu n, und
ben für die Summe ihrer Quadrate die Zahl b?

Antw. $\frac{m\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, $\frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

10) Welche Zahlen haben das Verhältniß m zu n,
ıd geben für die Differenz ihrer Quadrate die Zahl b?

Antw. $\frac{m\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$, $\frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$.

11) Ein gewisses Capital stehet zu 4 Procent auf Zin=
n; multiplicirt man die Anzahl der Thaler des Capitals

mit der Anzahl der Thaler in den fünfmonatlichen Zinsen, so erhält man $117041\frac{2}{3}$. Was für ein Capital ist es?

Antw. 2650 Thlr.

12) Jemand hat dreierlei Waaren, welche zusammen 230 Thlr. 5 Gr. kosten. Das Pfund einer jeden Sorte kostet so viele Groschen als Pfunde er davon vorräthig hat. Er hat aber von der zweiten Sorte um den dritten Theil mehr als von der ersten, und von der dritten $3\frac{1}{2}$ mal so viel als von der zweiten. Wie viel Pfund hat er von jeder Sorte?

Antw. Von der ersten 15, von der zweiten 20, und von der dritten 70 Pfund.

13) Jemand hat von einer gewissen Waare einen nicht sehr beträchtlichen Vorrath. Auf meine Frage, wie viel Pfunde es wären, gab er mir zur Antwort: „Wenn ich das Pfund zu $2\frac{3}{5}$ mal so viel Groschen verkaufe als es Pfunde sind, so löse ich daraus gerade so viel über 6 Thlr. 11 Gr. als ich weniger wie diese Summe lösen würde, wenn ich das Pfund zu halb so viel Groschen verkaufen wollte als es Pfunde sind." Wie viel Pfund sind es nun?

Antw. 10 Pfund.

14) Ich habe eine gewisse Zahl im Sinne; diese multiplicire ich mit $2\frac{1}{3}$, setze zum Produkte 7 hinzu, multiplicire das, was herauskommt, mit dem Achtfachen meiner Zahl, dividire alsdann durch 14, und ziehe vom Quotienten das Vierfache meiner Zahl ab; da erhalte ich 2352. Welche Zahl ist es?

Antw. 42.

15) Es sollen drei Zahlen gefunden werden, welche die Eigenschaft besitzen, daß das Produkt der ersten und zwei-

ten $= a$, das Produkt der ersten und dritten $= b$, und die Summe der Quadrate der zweiten und dritten $= c$ sey. Welche Zahlen sind es?

Antw. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c}}$, $a\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}$, $b\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}$.

16) Welche drei Zahlen sind es, die paarweise mit einander multiplicirt, und jedes Produkt durch die dritte dividirt, die Quotienten a, b, c geben?

Antw. $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, $\sqrt{bc}$.

17) Welche drei Zahlen besitzen die Eigenschaft, daß das Produkt der ersten mit der zweiten, der zweiten mit der dritten, und der dritten mit der ersten, nach der Folge die Zahlen a, b, c giebt?

Antw. $\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $\sqrt{\frac{ab}{c}}$, $\sqrt{\frac{bc}{a}}$.

18) Welche fünf Zahlen besitzen die Eigenschaft, daß, wenn eine jede, von der ersten an, mit der ihr folgenden, die letzte aber wieder mit der ersten multiplicirt wird, die Produkte a, b, c, d, e erhalten werden?

Antw. $\sqrt{\frac{ace}{bd}}$, $\sqrt{\frac{abd}{ce}}$, $\sqrt{\frac{bce}{ad}}$ $\sqrt{\frac{acd}{be}}$, $\sqrt{\frac{bde}{ac}}$.

19) Wenn aber, anstatt fünf, sieben Zahlen gefordert werden, und die Produkte a, b, c, d, e, f, g seyn sollen; welche Zahlen werden es alsdann seyn?

Antw. $\sqrt{\frac{aceg}{bdf}}$, $\sqrt{\frac{abdf}{ceg}}$, $\sqrt{\frac{bceg}{adf}}$, $\sqrt{\frac{acdf}{beg}}$, $\sqrt{\frac{bdeg}{acf}}$, $\sqrt{\frac{acef}{bdg}}$, $\sqrt{\frac{bdfg}{ace}}$.

Aehnliche Ausdrücke lassen sich für jede ungerade Anzahl der geforderten Zahlen finden, aber nur unter gewissen Bedingungen für eine gerade Anzahl. Warum? —

Und welcher Bedingung müssen die Zahlen a, b, c, d, rc. unterworfen seyn, wenn es alsdann doch möglich seyn soll, die Forderung zu erfüllen?

20) Es giebt zwei Zahlen, deren eine um 8 größer als die andere, und deren Produkt 240 ist. Welche Zahlen sind es?

Antw. 12 und 20.

21) Die Summe zweier Zahlen soll $= a$, ihr Produkt $= b$ seyn. Welche Zahlen sind es?

Antw. $\frac{a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$, $\frac{a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$.

22) Es soll eine Zahl gefunden werden, deren Quadrat diese Zahl um 306 übertrifft. Welche Zahl ist es?

Antw. 18.

23) Es soll eine Zahl gefunden werden, welche die Eigenschaft besitzt, daß, wenn man den dritten Theil derselben mit ihrem vierten Theile multiplicirt, und zum Produkte das Fünffache der gesuchten Zahl addirt, das was herauskommt, die Zahl 200 um eben so viel übertreffe, als die gesuchte Zahl selbst unter 280 ist. Welche Zahl ist es?

Antw. 48.

24) Jemand, der nach seinem Alter gefragt wurde, gab solches, wie folgt, an: „Meine Mutter hat mich am Ende ihres 20sten Jahres geboren; ihr Alter, in Jahren ausgedrückt, mit dem meinigen multiplicirt, übertrifft unser beider Alter zusammen um 2500." Wie alt war er nun?

Antw. 42 Jahr.

25) Ein Kaufmann hat zweierlei Thee von verschiedenem Gewicht und Preise. Das Gewicht der ersten Sorte verhält sich zum Gewicht der zweiten wie 4 zu 3. Das

Pfund der ersten kostet halb so viel Groschen, als sie an Pfunden wiegt; das Pfund der zweiten kostet 6 Gr. weniger als das Pfund der ersten. Der Betrag des Thees überhaupt ist 218 Thlr. 8 Gr. Wie viel wiegt jede Sorte?

Antw. Die erste 80, die zweite 60 Pfund.

26) Ein Kaufmann hat drei Stücke Tuch, von welchen das zweite 3, und das dritte 5 Ellen mehr als das erste hält. Die Elle des ersten kostet gerade so viele Groschen als es Ellen hält; von dem zweiten kostet die Elle 10, und von dem dritten 20 Gr. mehr als von dem ersten. Der sämmtliche Betrag dieses Tuches ist 397 Thlr. 2 Gr. Wie viel Ellen hält das erste Stück?

Antw. 50.

27) Man soll das Vermögen dreier Personen A, B, C, aus folgenden Angaben bestimmen. So oft A 5 Thlr. besitzt, hat B 9 und C 10 Thlr. Wenn man ferner das Geld des A (in Thalern ausgedrückt, und als bloße Zahl betrachtet,) mit dem Gelde des B, und das Geld des B mit dem des C multiplicirt, und beide Produkte zu dem sämmtlichen Vermögen aller drei addirt, so kommt 8832 heraus. Wie viel hat nun jeder?

Antw. A 40, B 42, C 80 Thlr.

28) Jemand kauft einige Tücher zu gleichen Preisen für 60 Thlr. Wären der Tücher für eben das Geld 3 mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um einen Thaler wohlfeiler gekommen. Wie viele Tücher hat er gekauft?

Antw. 12.

29) Ein Wohlthäter bestimmt eine Summe von 36 Thlr. zur gleichen Vertheilung unter die Armen einer kleinen Stadt. Da aber sechs von denen, welchen diese Wohlthat zugedacht war, der Hülfe nicht mehr benöthigt sind, so fällt

dadurch jedem der übrigen Armen für seinen Theil 2 Gr. mehr zu, als sonst geschehen wäre. Wie viele Armen waren anfänglich vorhanden?

Antw. 54.

30) Jemand stirbt und hinterläßt Kinder und ein Vermögen von 46800 Thlr., welches nach dem Testamente unter sie gleichmäßig getheilt werden soll. Es ereignet sich aber, daß, augenblicklich nach dem Hinscheiden des Vaters, auch zwei seiner Kinder sterben. Wenn nun hierdurch jedem Kinde 1950 Thlr. mehr zufällt, als sonst geschehen wäre: wie viele Kinder mußte dieser Mann haben?

Antw. 8 Kinder.

31) Es soll eine Zahl von einer solchen Beschaffenheit gefunden werden, daß, wenn eine gegebene Zahl c sowohl durch jene, als durch eine um a größere dividirt wird, der Unterschied beider Quotienten $= d$ sey. Welche Zahl ist es?

Antw. $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{ac}{d}\right)}$.

Sind die drei vorhergehenden Aufgaben in dieser begriffen?

32) 20 Personen, Männer und Weiber, verzehren in einem Gasthofe zusammen 48 Thlr.; nämlich, die Männer 24 Thlr. und die Weiber eben so viel. Nun findet sich aber bei der Durchsicht der Rechnung, daß ein Mann einen Thaler mehr bezahlen mußte als eine Frau. Wie viele Männer waren demnach darunter?

Antw. 8.

33) Jemand kauft ein Pferd, und bezahlt dafür eine gewisse Summe, verkauft es hernach wieder für 144 Thlr., und gewinnt daran genau eben so viele Procente, als ihm das Pferd gekostet hatte. Wie viel hat es gekostet?

Antw. 80 Thlr.

34) Ein Kaufmann läßt sich ein Stück Zeug kommen, und bezahlt dafür an Ort und Stelle eine gewisse Summe, außerdem aber noch vier Procent an Transportkosten. Er verkauft es wieder für 390 Thlr., und gewinnt an diesem Handel so viele Procente, als der zwölfte Theil des Einkaufspreises beträgt. Wie hoch hat er es also eingekauft?

Antw. Für 300 Thlr.

35) Zwei Bäuerinnen bringen zusammen 140 Eier zu Markte, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. „Hätte ich deine Eier gehabt," sagt die eine zur andern, „und hätte sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich daraus 1 Thlr. 6 Gr. gelöst." „Das mag wohl seyn," erwiederte die andere, „hätte ich aber deine Eier gehabt, und sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich gar 2 Thlr. 5 Gr. 4 Pf. daraus gelöst." Wie viel Eier brachte nun jede zu Markte?

Antw. Die eine 80, die andere 60.

36) Zwei Kaufleute setzen von einem Zeuge jeder ein Gewisses ab, der eine jedoch drei Ellen weniger als der andere, und lösen zusammen daraus 35 Thlr. „Aus deinem Zeuge," sagt der erste zum andern, „hätte ich bei meinem Preise 24 Thlr. lösen können." „Aus deinem Zeuge," antwortete ihm jener, „muß ich gestehen, hätte ich bei meinem niedrigen Preise nicht mehr als $12\frac{1}{2}$ Thlr. zu lösen vermocht." Wie viel Ellen hat jeder gehabt?

Antw. Der eine 15, der andere 18; oder auch der eine 5, der andere 8.

37) Zwei Reisende, A und B, reisen zu gleicher Zeit von zweien Oertern C und D ab, A von C nach D, und B von D nach C. Unterweges begegnen sie sich und erzählen einander von den Wegen, welche sie schon zurückgelegt

und noch zu machen haben. Da findet es sich nun, daß A schon 30 Meilen mehr als B zurückgelegt hat, und daß nach dem Verhältniß der Schnelligkeit, womit sie reisen, A darauf rechnen kann, in 4 Tagen den Ort D, und B erst in neun Tagen den Ort C zu erreichen. Wie weit ist C von D?

Antw. 150 Meilen.

38) Es sey in der vorigen Aufgabe d der Weg, welchen A mehr gemacht hat als B; a die Zeit, welche A braucht, um seinen noch übrigen Weg zu machen, und b die Zeit, welche B braucht, um seinen noch übrigen Weg zu machen. Welcher Ausdruck giebt die Entfernung der beiden Oerter C, D?

Antw. $\frac{d(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$.

39) Zwei Kleinhändler legten einmal 500 Thlr. zu einem Handelsgeschäft zusammen, wozu jeder ein Gewisses hergab; der eine ließ sein Geld fünf, der andere nur zwei Monat stehen, und jeder erhielt nach beendigtem Geschäfte an Capital und Gewinn 450 Thlr. zurück. Wie viel hat nun jeder hergegeben?

Antw. Der eine 200, der andere 300 Thlr.

40) Zwei Leute legten zusammen 2000 Thlr. in eine Handlung. Der eine ließ sein Geld 17 Monat stehen, und erhielt an Einlage und Gewinn 1710 Thlr. zurück; der andere ließ sein Geld 12 Monat stehen, und erhielt an Einlage und Gewinn 1040 Thlr. Wie viel hat jeder eingelegt?

Antw. Der eine 1200, der andere 800 Thlr.

41) Welche Zahlen haben die Summe 41, und die Quadratsumme 901?

Antw. 15 und 26.

Antw. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

54) Es giebt drei Zahlen in stetiger Proportion; addirt man sie, so ist die Summe 126, multiplicirt man sie aber mit einander, so ist das Produkt 13824: welche sind es?

Antw. 6, 24, 96.

55) Es wird eine Zahl gesucht, die mit drei Ziffern geschrieben wird, und so beschaffen ist, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Rang zu sehen, $=104$, das Quadrat der mittlern Ziffer aber um 4 größer sey als das doppelte Produkt der beiden andern; daß ferner, wenn 594 von der gesuchten Zahl abgezogen wird, die drei Ziffern in umgekehrter Ordnung zum Vorschein kommen. Welche Zahl ist es nun?

Antw. 862.

....

Nicht immer muß man die Größen, nach welchen gefragt wird, unmittelbar als die unbekannten in die Rechnung einführen; man würde sonst nicht selten auf höhere Gleichungen stoßen, als zur Auflösung der Aufgabe nöthig sind, und diese muß man doch so sehr als möglich zu vermeiden suchen. Oft ist es besser, irgend eine Combination derselben, wie etwa die Summe, die Differenz, das Produkt, die Summe der Quadrate, die Differenz der Quadrate, u. s. w., vorläufig zu suchen, und hieraus erst die Größen selbst zu bestimmen. Da dies ein sehr wichtiger, nicht genug zu beachtender, Punkt der Algebra ist, so lasse ich hier eine ziemliche Anzahl solcher Aufgaben folgen; weiterhin werden noch mehrere vorkommen.

....

48) Welche Zahl giebt, zu ihrer Quadratwurzel addirt, die Summe 1332?

Antw. 1296.

49) Welche Zahl übertrifft ihre Quadratwurzel um $48\frac{3}{4}$?

Antw. $56\frac{1}{4}$.

50) Es sind zwei Zahlen a und b gegeben; man soll nun jede derselben in zwei solche Theile zerlegen, daß der eine Theil von a sich zu dem einen Theile von b wie m zu n verhalte, und daß die beiden andern Theile das Produkt p geben. Wie muß man sie theilen?

Antw. Es sey $\frac{na+mb\pm\sqrt{[(na-mb)^2+4mnp]}}{2mn}=A$, so ist der eine Theil von $a=mA$, und der eine Theil von $b=nA$.

51) Es seyen wieder, wie in der vorigen Aufgabe, die beiden Zahlen a, b so zu theilen, daß die ersten Theile das Verhältniß m zu n haben, die Quadratsumme der beiden andern Theile aber $=s$ sey. Wie muß man sie alsdann theilen?

Antw. Es werde

$$\frac{am+bn\pm\sqrt{[(m^2+n^2)s-(an-bm)^2]}}{m^2+n^2}=A$$

gesetzt, so ist der erste Theil von $a=mA$, und der erste Theil von $b=nA$.

52) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz mit der Differenz ihrer Quadrate zusammen 150, und deren Summe mit der Summe ihrer Quadrate zusammen 330 macht. Welche Zahlen sind es?

Antw. 9 und 15.

53) Welche zwei Zahlen sind es, deren Summe, Produkt und Differenz der Quadrate einander gleich sind?

Antw. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

54) Es giebt drei Zahlen in stetiger Proportion; addirt man sie, so ist die Summe 126, multiplicirt man sie aber mit einander, so ist das Produkt 13824: welche sind es?

Antw. 6, 24, 96.

55) Es wird eine Zahl gesucht, die mit drei Ziffern geschrieben wird, und so beschaffen ist, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Rang zu sehen, $=104$, das Quadrat der mittlern Ziffer aber um 4 größer sey als das doppelte Produkt der beiden andern; daß ferner, wenn 594 von der gesuchten Zahl abgezogen wird, die drei Ziffern in umgekehrter Ordnung zum Vorschein kommen. Welche Zahl ist es nun?

Antw. 862.

....

Nicht immer muß man die Größen, nach welchen gefragt wird, unmittelbar als die unbekannten in die Rechnung einführen; man würde sonst nicht selten auf höhere Gleichungen stoßen, als zur Auflösung der Aufgabe nöthig sind, und diese muß man doch so sehr als möglich zu vermeiden suchen. Oft ist es besser, irgend eine Combination derselben, wie etwa die Summe, die Differenz, das Produkt, die Summe der Quadrate, die Differenz der Quadrate, u. s. w., vorläufig zu suchen, und hieraus erst die Größen selbst zu bestimmen. Da dies ein sehr wichtiger, nicht genug zu beachtender, Punkt der Algebra ist, so lasse ich hier eine ziemliche Anzahl solcher Aufgaben folgen; weiterhin werden noch mehrere vorkommen.

....

Antw. Das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder ist $=\frac{c-a^2-b^2}{4}$; also die Proportion selbst:

$$\tfrac{1}{2}[-b+\sqrt{(c-a^2)}] : \tfrac{1}{2}[-a+\sqrt{(c-b^2)}] =$$
$$\tfrac{1}{2}[+a+\sqrt{(c-b^2)}] : \tfrac{1}{2}[+b+\sqrt{(c-a^2)}].$$

65) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder $= a$, die Summe aller vier Glieder $= b$, und die Summe ihrer Quadrate $= c$: welche ist es?

Antw. Wird, der Kürze wegen, $\pm\sqrt{(8a+2c-b^2)}=A$ gesetzt, so ist $\frac{b-A}{2}$ die Summe der beiden mittlern, und $\frac{b+A}{2}$ die Summe der beiden äußern Glieder; also die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{4}[b+A-\sqrt{(2c-8a+2bA)}] : \tfrac{1}{4}[b-A-\sqrt{(2c-8a-2bA)}]$$
$$=\tfrac{1}{4}[b-A+\sqrt{(2c-8a-2bA)}] : \tfrac{1}{4}[b+A+\sqrt{(2c-8a+2bA)}].$$

66) Das Produkt der äußern oder mittlern Glieder einer geometrischen Proportion ist $= a$, die Differenz zwischen der Summe der äußern und der Summe der mittlern Glieder $= b$, und die Summe der Quadrate aller vier Glieder $= c$: welche ist es?

Antw. Es sey wieder $\pm\sqrt{(8a+2c-b^2)}=A$, so ist $\frac{A-b}{2}$ die Summe der mittlern, $\frac{A+b}{2}$ die Summe der äußern Glieder, und daher die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{4}[(A+b-\sqrt{(2c-8a+2bA)}] : \tfrac{1}{4}[A-b-\sqrt{(2c-8a-2bA)}]$$
$$=\tfrac{1}{4}[(A-b+\sqrt{(2c-8a-2bA)}] : \tfrac{1}{4}[A+b+\sqrt{(2c-8a+2bA)}].$$

Für $a=18$, $b=2$, $c=130$ ist $2 : 3 = 6 : 9$

Für $a=270$, $b=20$, $c=3922$ ist $5 : 9 = 30 : 54$

67) In einer geom. Proportion ist das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder $= a$, die Summe al-

ler Glieder $= b$, und die Differenz zwischen der Quadratsumme der äußern und der Quadratsumme der mittlern Glieder $= c$: welche ist es?

Antw. Die Summe der beiden mittlern Glieder ist $\frac{b^2 - c}{2b}$, also die Summe der beiden äußern $\frac{b^2 + c}{2b}$, und daher die gesuchte Proportion:

$$\frac{b^2+c-\sqrt{[(b^2+c)^2-16ab^2]}}{4b} : \frac{b^2-c-\sqrt{[(b^2-c)^2-16ab^2]}}{4b}$$
$$= \frac{b^2-c+\sqrt{[(b^2-c)^2-16ab^2]}}{4b} : \frac{b^2+c+\sqrt{[(b^2+c)^2-16ab^2]}}{4b}.$$

68) Es werden drei Zahlen in stetiger Proportion gesucht, deren Summe $= a$, und Summe der Quadrate $= b$: welche Zahlen sind es?

Antw. Das mittlere Glied der gesuchten Proportion ist $\frac{a^2 - b}{2a}$; die beiden äußern Glieder sind daher:

$$\frac{a^2+b-\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a}, \quad \frac{a^2+b+\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a}.$$

Zwischen welche Grenzen muß der Werth von b fallen, wenn die Aufgabe mögliche Resultate geben soll?

69) In einer stetigen Proportion ist die Summe aller drei Glieder $= a$, und der Rest, welchen man erhält, wenn von der Summe der Quadrate der äußern Glieder das Quadrat des mittlern Gliedes abgezogen wird, $= b$: was für eine ist es?

Antw. Das mittlere Glied heiße g, so ist

$$g = \frac{-a \pm \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2};$$

hieraus erhält man die äußern Glieder.

$\frac{1}{2}[a-g \pm \sqrt{(a^2-2ag-3g^2)}]$, $\frac{1}{2}[a-g \mp \sqrt{(a^2-2ag-3g^2)}]$.

70) In einer geometrischen Progression von vier Glie-

dern ist die Summe aller Glieder $= a$, und die Summe ihrer Quadrate $= b$: welche Progression ist es?

Antw. Es bezeichne s die halbe Summe und d die halbe Differenz der beiden mittlern Glieder, so ist $s = \frac{-b \pm \sqrt{[b^2 + 2a^2(a^2 - b)]}}{4a}$, und $d = s\sqrt{\frac{a-4s}{a+4s}}$; hieraus ergeben sich ferner die beiden mittlern Glieder $s-d$, $s+d$, und die beiden äußern $\frac{(s-d)^2}{s+d}$, $\frac{(s+d)^2}{s-d}$.

71) In einer geom. Progression von vier Gliedern ist gegeben: die Differenz zwischen der Summe der beiden äußern und der Summe der beiden mittlern Glieder $= a$, wie auch die Differenz zwischen der Quadratsumme der beiden äußern Glieder und der Quadratsumme der beiden mittlern $= b$: welche Progression ist es?

Antw. Es sey s die halbe Summe der beiden mittlern Glieder, d die halbe Differenz derselben, so ist $s = \frac{b-a^2}{4a}$, $d = \frac{b-a^2}{4\sqrt{(2b-a^2)}}$; hieraus erhält man die Mittelglieder $s-d$, $s+d$, und die äußern $\frac{(s-d)^2}{s+d}$, $\frac{(s+d)^2}{s-d}$.

72) In einer geometrischen Progression von vier Gliedern ist gegeben: die Differenz zwischen der Summe des zweiten und vierten Gliedes und der Summe des ersten und dritten Gliedes $= a$, wie auch die Quadratsumme aller vier Glieder $= b$: welche Progression ist es?

Antw. Es sey die halbe Differenz der mittlern Glieder $= d$, ihre halbe Summe $= s$, so ist $d = \frac{b \pm \sqrt{[b^2 + 2a^2(a^2 - b)]}}{4a}$, $s = d\sqrt{\frac{a+4d}{a-4d}}$. Hieraus ergeben sich, wie bei den beiden vorigen Aufgaben, die mittlern und äußern Glieder.

73) In einer geom. Progression von vier Gliedern ist gegeben: Summe aller Glieder $=a$, Differenz zwischen der Quadratsumme der äußern und der Quadratsumme der mittlern Glieder $=b$: welche Progression ist es?

Antw. Halbe Summe der mittlern Glieder $s=\frac{a^2-b}{4a}$, halbe Differenz $d=\pm s\sqrt{\frac{b}{8as+b}}$, woraus das Uebrige, wie in den drei vorigen Aufgaben.

74) In einer geom. Progression von vier Gliedern ist gegeben: die Summe der beiden äußern Glieder $=a$, die Summe der beiden mittlern $=b$: welche Progression ist es?

Antw. Der Exponent der Progression heiße e, so ist $e=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2b}$, und das erste Glied $=\frac{a}{e^3+1}=\frac{b}{e^2+e}$.

75) In einer geom. Proportion ist gegeben: Summe der Mittelglieder $=a$, Summe der äußern $=b$, Summe der Cuben aller vier Glieder $=c$: welche ist es?

Antw. Das Produkt der mittlern oder äußern Glieder heiße p, so ist $p=\frac{a^3+b^3-c}{3(a+b)}$, und die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{2}[b-\sqrt{(b^2-4p)}] : \tfrac{1}{2}[a-\sqrt{(a^2-4p)}]$$
$$= \tfrac{1}{2}[a+\sqrt{(a^2-4p)}] : \tfrac{1}{2}[b+\sqrt{(b^2-4p)}].$$

76) In einer geom. Proportion ist gegeben: Summe aller Glieder $=a$, Summe ihrer Quadrate $=b$, Summe ihrer Cuben $=c$: welche ist es?

Antw. Das Produkt der mittlern oder der äußern Glieder ist $p=\frac{a^3-3ab+2c}{6a}$, die Differenz zwischen der Summe

der beiden äußern und der Summe der beiden mittlern ist $d = \pm\sqrt{\frac{a^3 - 6ab + 8c}{3a}}$; folglich die Summe der beiden äußern $= \frac{a+d}{2}$, die Summe der beiden mittlern $= \frac{a-d}{2}$; hieraus ferner die Proportion:

$$\tfrac{1}{4}\left[a+d-\sqrt{[(a+d)^2-16p]}\right] : \tfrac{1}{4}\left[a-d-\sqrt{[(a-d)^2-16p]}\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[a-d+\sqrt{[(a-d)^2-16p]}\right] : \tfrac{1}{4}\left[a+d+\sqrt{[(a+d)^2-16p]}\right].$$

77) In einer geom. Proportion ist gegeben: die Differenz zwischen der Summe der äußern und der Summe der mittlern Glieder $= a$, die Differenz zwischen der Quadratsumme der äußern und der Quadratsumme der mittlern Glieder $= b$, ferner die Differenz zwischen der Cubensumme der äußern und der Cubensumme der mittlern Glieder $= c$: welche Proportion ist es?

Antw. Die Summe aller Glieder ist $= \frac{b}{a}$; hieraus die Summe der äußern Glieder $s = \frac{b + a^2}{2a}$, die Summe der mittlern $s' = \frac{b - a^2}{2a}$. Das Produkt der äußern oder mittlern Glieder ist $p = \frac{a^4 + 3b^2 - 4ac}{12a^2}$. Ist s, s' und p gefunden, so ist die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{2}[s - \sqrt{(s^2 - 4p)}] : \tfrac{1}{2}[s' - \sqrt{(s'^2 - 4p)}]$$
$$= \tfrac{1}{2}[s' + \sqrt{(s'^2 - 4p)}] : \tfrac{1}{2}[s + \sqrt{(s^2 - 4p)}].$$

78) In einer geom. Proportion ist gegeben: das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder $= a$, die Summe aller Glieder $= b$, und die Summe ihrer Cuben $= c$: welche Proportion ist es?

Antw. Es werde, der Kürze wegen, $\pm\sqrt{\frac{4c + 12ab - b^3}{3b}}$

$=A$ gesetzt, so ist $\frac{b+A}{2}$ die Summe der äußern Glieder, also $\frac{b-A}{2}$ die Summe der mittlern; hieraus erhält man die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{4}[b+A-\sqrt{[(b+A)^2-16a]}]:\tfrac{1}{4}[b-A-\sqrt{[(b-A)^2-16a]}]$$
$$=\tfrac{1}{4}[b-A+\sqrt{[(b-A)^2-16a]}]:\tfrac{1}{4}[b+A+\sqrt{[(b+A)^2-16a]}]$$

79) In einer geom. Proportion ist gegeben: die Summe der beiden äußern Glieder $=a$, die Summe der beiden mittlern $=b$, und die Summe der Cuben aller vier Glieder $=c$: welche Proportion ist es?

Antw. Es sey der Kürze wegen

$$\sqrt{\frac{4c-a^3-4b^3+3a^2b}{3(a+b)}}=A, \sqrt{\frac{4c-4a^3-b^3+3ab^2}{3(a+b)}}$$

$=B$, so ist $\frac{a-A}{2}:\frac{b-B}{2}=\frac{b+B}{2}:\frac{a+A}{2}$ die gesuchte Proportion.

80) Wie werden nachstehende beide Gleichungen, worin x', x'', die gesuchten Größen sind, aufgelöst?

$$(x'+x'')\ (1+x'x''+x'^2x''+x'x''^2+x'^2x''^2)+x'x''=a$$

$$x'x''\ (x'+x'')\ (x'+x''+x'x'')\ (x'+x''+x'x''+x'^2x''+x'x''^2)=b.$$

Antw. Macht man in diesen Gleichungen nach einander die Substitutionen: $x'+x''=y'$, $x'x''=y''$; $y'+y''=z'$, $y'y''=z''$; $z'+z''=w'$, $z'z''=w''$; so findet man am Ende $w'+w''=a$, $w'w''=b$. Die gesuchten Größen x', x'' sind daher durch nachstehende vier Gleichungen des zweiten Grades gegeben:

$$w^2-aw+b=0$$
$$z^2-w'z+w''=0$$
$$y^2-z'y+z''=0$$
$$x^2-y'x+y''=0$$

Die erste giebt w', w''; die zweite z', z''; die dritte y', y''; und endlich die vierte x', x''. Man erhält so nach und nach:

$$w' = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}, \quad w'' = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$$

$$z' = \frac{w' \pm \sqrt{(w'^2 - 4w'')}}{2}, \quad z'' = \frac{w' \mp \sqrt{(w'^2 - 4w'')}}{2}.$$

$$y' = \frac{z' \pm \sqrt{(z'^2 - 4z'')}}{2}, \quad y'' = \frac{z' \mp \sqrt{(z'^2 - 4z'')}}{2}$$

$$x' = \frac{y' \pm \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2}, \quad x'' = \frac{y' \mp \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2}$$

und daher sowohl für x', als für x'', sechzehn verschiedene Werthe.

Hätte man die obigen Gleichungen auf dem gewöhnlichen Wege aufzulösen versucht, so würde man, nach einem beschwerlichen Eliminiren, auf eine Gleichung des sechzehnten Grades gekommen seyn.

XVIII. Aufgaben für die Gleichungen von höheren Graden.

1) Welche Zahl ist es, deren dritter Theil, mit ihrem Quadrate multiplicirt, die Zahl 1944 hervorbringt?

Antw. 18.

2) Welche Zahl ist es, deren Hälfte, Drittel und Viertel mit einander multiplicirt, und das Produkt um 32 vermehrt, 4640 giebt?

Antw. 48.

3) Es wird eine Zahl von einer solchen Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man die vierte Potenz durch den achten

Theil der Zahl dividirt, und vom Quotienten 167 abzieht, der Rest 12000 sey. Welche Zahl ist es?

Antw. $11\frac{1}{2}$.

4) Jemand kauft Citronen, die in eine gewisse Anzahl Schachteln gepackt sind, deren jede dreimal so viele Citronen enthält, als der Schachteln sind; bezahlt für jede Citrone doppelt so viele Pfennige, als es Schachteln sind, und für alle insgesammt 57 Thlr. 4 Gr. Wie viele Citronen hat er gekauft?

Antw. 588.

5) Einige Kaufleute verbinden sich zu einem Handelsgeschäfte; jeder giebt dazu tausendmal so viele Thaler her als ihrer sind. Sie gewinnen an diesem Geschäfte 2560 Thlr., und es findet sich, nach angestellter Rechnung, daß sie gerade halb so viele Procente gewonnen haben als ihrer sind. Wie viele Kaufleute sind es?

Antw. 8.

6) Ein Capitalist giebt 10000 Thlr. auf Zinsen, und schlägt die Zinsen jährlich zum Capitale. Am Ende des dritten Jahres findet er sein Capital auf $11576\frac{1}{4}$ Thlr. angewachsen. Wie viel Procent trug es jährlich?

Antw. 5.

7) Es werden drei Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht: multiplicirt man das Quadrat der ersten mit der zweiten, so erhält man 112; multiplicirt man das Quadrat der zweiten Zahl mit der dritten, so erhält man 588; multiplicirt man aber das Quadrat der dritten Zahl mit der ersten, so bekommt man 576. Welche Zahlen sind es?

Antw. 4, 7, 12.

8) Es werden drei Zahlen gesucht, die so beschaffen sind, daß das Quadrat der ersten mit der zweiten multipli-

Die erste giebt w', w''; die zweite z', z''; die dritte y', y''; und endlich die vierte x', x''. Man erhält so nach und nach:

$$w' = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}, \quad w'' = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$$

$$z' = \frac{w' \pm \sqrt{(w'^2 - 4w'')}}{2}, \quad z'' = \frac{w' \mp \sqrt{(w'^2 - 4w'')}}{2}.$$

$$y' = \frac{z' \pm \sqrt{(z'^2 - 4z'')}}{2}, \quad y'' = \frac{z' \mp \sqrt{(z'^2 - 4z'')}}{2}$$

$$x' = \frac{y' \pm \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2}, \quad x'' = \frac{y' \mp \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2}$$

und daher sowohl für x', als für x'', sechzehn verschiedene Werthe.

Hätte man die obigen Gleichungen auf dem gewöhnlichen Wege aufzulösen versucht, so würde man, nach einem beschwerlichen Eliminiren, auf eine Gleichung des sechzehnten Grades gekommen seyn.

XVIII. Aufgaben für die Gleichungen von höheren Graden.

1) Welche Zahl ist es, deren dritter Theil, mit ihrem Quadrate multiplicirt, die Zahl 1944 hervorbringt?

Antw. 18.

2) Welche Zahl ist es, deren Hälfte, Drittel und Viertel mit einander multiplicirt, und das Produkt um 32 vermehrt, 4640 giebt?

Antw. 48.

3) Es wird eine Zahl von einer solchen Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man die vierte Potenz durch den achten

...hlt für dieses Gefäß 120 Thlr., nämlich, für ... darin enthaltenen reinen Silbers 8 Gr. ... Gefäß kosten würde, wenn er jede Mark sei... mit einem Groschen bezahlen wollte. Wie ...un?

... Mark.

...e Officiere liegen mit einem Detachement, ...e, theils Cavallerie, zu Felde. Jeder Offi... seinem Befehl dreimal so viele Cavalleristen, ... so viele Infanteristen, als Officiere sind. ... hat 2, und jeder Infanterist 22 Patronen ...ere sind; insgesammt haben sie 15360 Pa... ...iele Officiere sind es?

...d wurde gefragt, wie viel er heute ausge... – „Heute," gab er zur Antwort, „4 Thlr. ...ern doppelt so viel als vorgestern; wenn ich ... welche ich an diesen drei Tagen ausgegeben ...alern gerechnet, mit einander multiplicire, ...ukt 756 addire, so erhalte ich gerade 134 ...ls ich heute ausgegeben habe." — Wie viel ...?

... oder 9 Thlr.

...ge Kaufleute legen eine gewisse Summe zu... ...zwar jeder 10mal so viel Thaler, als ihrer ... damit, und gewinnen eine Anzahl Procente, ... größer ist, als die Anzahl der Kaufleute. Der ...gt aber 288 Thlr.: wie viele waren ihrer nun? ...12.

...ige Kaufleute bringen ein Capital von 8240 Thlr. ...ierzu legt nun jeder noch 40mal so viele Thlr.,

cirt $= a$, das Quadrat der zweiten mit der dritten $= b$ und das Quadrat der dritten mit der ersten $= c$ sey. Welche Zahlen sind es?

Antw. $\sqrt[9]{\frac{a^4 c}{b^2}}$, $\sqrt[9]{\frac{b^4 a}{c^2}}$, $\sqrt{\frac{c^4 b}{a^2}}$.

9) Wenn aber vier Zahlen gesucht werden, und verlangt wird, daß nach der Reihe die Produkte a, b, c, d, herauskommen sollen, wenn das Quadrat einer jeden mit der ihr folgenden, und das Quadrat der letzten wieder mit der ersten multiplicirt wird: welche Zahlen werden es alsdann seyn?

Antw. $\sqrt[15]{\frac{a^8 c^2}{b^4 d}}$, $\sqrt[15]{\frac{b^8 d^2}{c^4 a}}$, $\sqrt[15]{\frac{c^8 a^2}{d^4 b}}$, $\sqrt[15]{\frac{d^8 b^2}{a^4 c}}$.

(Aehnliche Formeln lassen sich auch für fünf, sechs und mehr Zahlen finden, auch läßt sich die Aufgabe noch allgemeiner darstellen, welches alles dem eigenen Nachdenken des Lesers überlassen wird.)

10) Jemand zapft von einem vollen Weinfasse, welches 81 Quart Wein enthält, eine gewisse Quantität ab. Nachdem er es hierauf wieder mit Wasser gefüllt hat, zapft er von dieser Mischung wieder eben so viel als vorher ab; dieses thut er viermal hinter einander, bis nicht mehr als 16 Quart reiner Wein im Fasse, das Uebrige aber Wasser ist. Wie viele Quart hat er jedesmal abgezapft?

Antw. 27.

11) Es giebt zwei Zahlen, die um 4 unterschieden, und übrigens so beschaffen sind, daß ihr Produkt mit ihrer Summe multiplicirt 1386 giebt: welche Zahlen sind es?

Antw. 7 und 11.

12) Jemand kauft ein silbernes Gefäß, welches gerade so viele Mark wiegt als jede Mark Lothe reines Silber ent-

hält. Er bezahlt für dieses Gefäß 120 Thlr., nämlich, für jedes Loth des darin enthaltenen reinen Silbers 8 Gr. mehr, als als Gefäß kosten würde, wenn er jede Mark seines Gewichtes mit einem Groschen bezahlen wollte. Wie viel wiegt es nun?

Antw. 12 Mark.

13) Einige Officiere liegen mit einem Detachement, theils Infanterie, theils Cavallerie, zu Felde. Jeder Officier hat unter seinem Befehl dreimal so viele Cavalleristen, und siebenmal so viele Infanteristen, als Officiere sind. Jeder Cavallerist hat 2, und jeder Infanterist 22 Patronen mehr als Officiere sind; insgesammt haben sie 15360 Patronen. Wie viele Officiere sind es?

Antw. 8.

14) Jemand wurde gefragt, wie viel er heute ausgegeben habe: — „Heute," gab er zur Antwort, „4 Thlr. mehr, und gestern doppelt so viel als vorgestern; wenn ich die Summen, welche ich an diesen drei Tagen ausgegeben habe, nach Thalern gerechnet, mit einander multiplicire, und zum Produkt 756 addire, so erhalte ich gerade 134 mal so viel, als ich heute ausgegeben habe." — Wie viel ist es demnach?

Antw. 6 oder 9 Thlr.

15) Einige Kaufleute legen eine gewisse Summe zusammen, und zwar jeder 10mal so viel Thaler, als ihrer sind; handeln damit, und gewinnen eine Anzahl Procente, welche um 8 größer ist, als die Anzahl der Kaufleute. Der Gewinn beträgt aber 288 Thlr.: wie viele waren ihrer nun?

Antw. 12.

16) Einige Kaufleute bringen ein Capital von 8240 T... zusammen. Hierzu legt nun jeder noch 40mal so vie...

als ihrer sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viele Procente, als der Personen sind. Hierauf theilen sie den Gewinn, und jeder nimmt 10 mal so viele Thaler, als der Personen sind; es bleiben aber alsdann noch 224 Thlr. übrig. Wie viele Kaufleute sind es gewesen?

Antw. Entweder 7, oder 8, oder 10.

17) Vier Personen, A, B, C, D, haben jeder eine gewisse Anzahl Thaler bei sich, und zwar B einen Thaler mehr als A, C einen Thaler mehr als B, und D einen Thaler mehr als C. Wenn man die vier Summen mit einander multiplicirt und das Produkt als Thaler ansieht, so erhält man 1168 Thlr. mehr, als wenn man die Summe des D cubirt. Wie viel hat jeder?

Antw. A 5, B 6, C 7, D 8 Thlr.

18) Jemand hat eine gewisse Anzahl Arbeiter, und zwar dreimal so viel, als jeder täglich Groschen erhält. Sie arbeiten gemeinschaftlich gerade 100 Tage weniger, als der Tagelohn aller zusammen an Groschen beträgt, und erhalten für diese Zeit insgesammt 2500 Thlr. Wie viele Arbeiter sind es? und wie viele Tage haben sie gearbeitet?

Antw. 30 Arbeiter und 200 Tage.

19) Ich habe zwei Zahlen, deren Summe 63 ist. Wird die größere durch die kleinere dividirt, das, was herauskommt, mit der größern multiplicirt, und zum Produkte $20\frac{1}{4}$ addirt, so entsteht eine Cubikzahl, deren Wurzel um eins weniger ist, als der siebente Theil der größern Zahl; welche Zahlen sind es?

Antw. 35 und 28.

20) Ein Wasserbehälter erhält seinen Zufluß aus vier Röhren, und kann dadurch in $115\frac{1}{5}$ Minuten gefüllt wer-

den. Soll aber der Behälter durch jede einzelne Röhre gefüllt werden, so erfordert die zweite 4, die dritte 8, und die vierte 12 Stunden mehr als die erste. In welcher Zeit wird er demnach durch die erste gefüllt.

Antw. In 4 Stunden.

21) Drei Zahlen sind durch nachstehende Merkmale gegeben: die Summe der ersten und zweiten ist $=a$, die Summe der Quadrate der zweiten und dritten $=b$, und die Summe der Cuben der ersten und dritten $=c$. Durch welche Gleichung werden diese drei Zahlen bestimmt?

Antw. Es bezeichne x die erste der drei gesuchten Zahlen, so ist

$$[b-(a-x)^2]^3=(c-x^3)^2$$

die Gleichung, welche man aufzulösen hat. Ist hieraus x bestimmt, so lassen sich die beiden andern Zahlen sehr leicht finden. Eine Aufgabe kann aber als aufgelöst angesehen werden, sobald man sie, wie hier, auf die einfachste Gleichung, welche sie zuläßt, gebracht hat, obgleich wir nicht immer im Stande sind, die Gleichungen selbst vollständig aufzulösen.

22) Man kennt die Summe zweier Zahlen $=a$, die Summe ihrer sechsten Potenzen $=b$; wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Das Produkt p der beiden Zahlen ist durch die Gleichung $2p^3-9a^2p^2+6a^4p-a^6+b=0$ gegeben. (Man erinnere sich bei dieser und den folgenden Aufgaben an die Bemerkung S. 235.)

23) Die Summe zweier Zahlen ist $=a$, die Summe ihrer siebenten Potenzen $=b$; wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Das Produkt p der beiden Zahlen ist durch die

Gleichung $7ap^3 - 14a^3p^2 + 7a^5p - a^7 + b = 0$ gegeben.

Ueberhaupt führen die beiden Gleichungen $x + y = a$, $x^{2n} + y^{2n} = b$ oder $x^{2n+1} + y^{2n+1} = b$, immer auf eine Gleichung des $n$ten Grades für p, deren Gesetz sich auch angeben läßt.

24) Die $m$fache Differenz zum $n$fachen Produkte zweier Größen addirt, giebt a; die Differenz mit der Quadratsumme der beiden Größen multiplicirt, giebt b: welche sind es?

Antw. Die Differenz $= y$ und das Produkt $= z$ der beiden Größen sind durch die Gleichungen: $ny^3 - 2my^2 + 2ay - nb = 0$, $nz = a - my$ gegeben. Hat man hieraus y und z bestimmt, so hat man auch die Größen selbst, durch die Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades. Die beiden Größen sind eigentlich durch Gleichungen des sechsten Grades gegeben, welche aber, wie man sieht, auf Gleichungen des dritten und zweiten Grades reducirt werden können.

25) Die Summe dreier Zahlen ist $= a$, die Summe ihrer Produkte zu zwei und zwei $= b$, das Produkt aller $= c$. Durch welche Gleichung werden diese Zahlen bestimmt?

Antw. Die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ giebt durch ihre drei Wurzeln alle drei Zahlen zugleich.

26) Es ist gegeben: die Summe dreier Zahlen $= a$, die Summe ihrer Produkte zu zwei und zwei $= b$, und die Summe der sechs Produkte, welche entstehen, wenn eine jede mit dem Quadrate einer andern multiplicirt wird, $= c$. Wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Das Produkt der drei gesuchten Zahlen ist

$=\frac{ab-c}{3}$, also $x^3-ax^2+bx-\frac{ab-c}{3}=0$ die Gleichung, durch welche sie alle drei zugleich gegeben werden.

27) Es ist gegeben: die Summe dreier Zahlen $=a$, die Summe ihrer Quadrate $=b$, die Summe ihrer Cuben $=c$. Wie werden sie gefunden?

Antw. Die Summe der Produkte zu zwei und zwei ist $=\frac{a^2-b}{2}$, und das Produkt aller drei $=\frac{2c+a^3-3ab}{6}$. Es giebt demnach die Gleichung

$$x^3-ax^2+\frac{a^2-b}{2}x-\frac{2c+a^3-3ab}{6}=0$$

alle drei Zahlen zugleich.

28) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist $=a$, die Summe ihrer Cuben $=b$: welche Zahlen sind es?

Antw. Es bezeichne s die Summe der beiden Zahlen, so ist $s^3-3as+2b=0$ die Gleichung, durch welche sie bestimmt wird. Hat man s, so lassen sich die Zahlen selbst leicht finden; sie sind durch die Gleichung $x^2-sx+\frac{s^2-a}{2}=0$ gegeben.

29) Die Summe der Produkte dreier Zahlen zu zwei und zwei ist $=a$, die Summe der Quadrate $=b$, das Produkt aller drei $=c$. Wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Die Summe der drei Zahlen ist $=\pm\sqrt{(2a+b)}$; also die Gleichung, durch welche sie zugleich gegeben werden:

$$x^3\mp x^2\sqrt{(2a+b)}+ax-c=0.$$

30) Die Summe der Produkte dreier Zahlen zu zwei und zwei ist $=a$, die Summe der Quadrate $=b$, die Summe der Cuben $=c$. Wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Die Summe der drei Zahlen ist $=\pm\sqrt{(2a+b)}$,

das Produkt aller drei $= \frac{1}{3}[c \pm (a-b)\sqrt{(2a+b)}]$. Die folgende Gleichung giebt daher alle drei Zahlen zugleich:

$$x^3 \mp x^2\sqrt{(2a+b)} + ax - \tfrac{1}{3}[c \pm (a-b)\sqrt{(2a+b)}] = 0.$$

31) Die Summe der Produkte dreier Zahlen zu zwei und zwei ist $= a$, die Summe der Quadrate $= b$, die Summe der sechs Produkte, welche entstehen, wenn eine jede mit dem Quadrate einer andern multiplicirt wird, $= c$. Wie werden sie gefunden?

Antw. Die Summe der drei Zahlen ist $= \pm\sqrt{(2a+b)}$, und das Produkt aller $= \frac{1}{3}[\pm a\sqrt{(2a+b)} - c]$; sie werden daher durch die folgende Gleichung gegeben:

$$x^3 \mp x^2\sqrt{(2a+b)} + ax - \tfrac{1}{3}[+a\sqrt{(2a+b)} - c] = 0.$$

32) Es werden drei Zahlen in stetiger Proportion gesucht, deren Summe $= a$, und Summe der Cuben $= b$ ist: wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Bezeichnet y das Mittelglied der Proportion, so ist $3y^3 - 3a^2y + a^3 - b = 0$ die Gleichung, wodurch dasselbe bestimmt wird. Es sey w eine Wurzel dieser Gleichung, so ist

$$x^2 - (a-w)x - \frac{b-w^3}{3(a-w)} + \frac{(a-w)^2}{3} = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln die beiden äußern Glieder geben.

Für $a = 21$, $b = 1971$, ist $y^3 - 441y + 2430 = 0$. Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind 6, $-3+\sqrt{414}$, $-3-\sqrt{414}$. Wird $w = 6$ angenommen, so ist $x^2 - 15x + 36 = 0$ die Gleichung, deren Wurzeln 3 und 12 die beiden äußern Glieder geben. Die stetige Proportion ist daher 3 : 6 : 12.

33) In einer Progression von vier Gliedern kennt

man die Differenz der beiden äußern Glieder $= a$, und die Summe der beiden mittlern $= b$: welche Progression ist es?

Antw. Den Exponenten der Progression durch y bezeichnet, ist $by^3 - ay^2 - ay - b = 0$ die Gleichung, durch welche derselbe bestimmt wird. Hat man diesen gefunden, so ist das erste Glied $= \frac{b}{y^2 + y} = \frac{a}{y^3 - 1}$.

34) Welche Progression wird es aber seyn, wenn die Summe der beiden mittlern Glieder $= a$, und die Quadratsumme der beiden äußern $= b$ ist?

Antw. Die Differenz der beiden mittlern Glieder $= d$, und $d^2 = y$ gesetzt, ist $y^3 + (15a^2 - 2b)y^2 + (15a^4 + 4a^2b)y + a^4(a^2 - 2b) = 0$ die Gleichung, wodurch y gegeben wird. Ist hieraus y, also auch d gefunden, so erhält man den Exponenten der Progression $= \frac{a+d}{a-d}$, und das erste Glied $= \frac{(a-d)^2}{2(a+d)}$.

....

Weiß man schon im Voraus, es sey aus der Natur der Aufgabe, welche auf eine gegebene Gleichung führt, oder irgend anders woher, etwas von den Verhältnissen der Wurzeln dieser Gleichung, so ist man, wenige Fälle ausgenommen, immer im Stande, die gegebene Gleichung auf niedrigere zu reduciren. Nachstehende Aufgabe wird dieses in etwas erläutern.

....

35) Es seyen $2m$ Größen durch die Gleichung $x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + cx^{2m-3} + \ldots\ldots + kx + l = 0$ gegeben. Man weiß schon im Voraus, daß die Summe von je zwei und zwei dieser Größen dieselbe ist. Wie läßt sich nun diese Gleichung durch andere von niedrigern Graden auflösen?

Antw. Die Summe von je zwei und zwei Wurzeln dieser Gleichung ist $= -\frac{a}{m}$. Man ordne dieselbe nach Potenzen von $x^2 + \frac{ax}{m}$ und setze hierauf y für diesen Ausdruck, so erhält man eine Gleichung des $m$ten Grades für y. Kann man hieraus y finden, so hat man auch x aus der Gleichung $x^2 + \frac{ax}{m} = y$. Der Beweis hiervon beruht auf der Zerlegung der Gleichungen in einfache Faktoren, und ist daraus leicht herzuleiten. Wird dem Nachdenken des Lesers überlassen.

Zu dieser Classe gehört z. B. die Gleichung $x^4 - 10x^3 + 18x^2 + 35x - 12 = 0$. Man setze $x^2 - 5x = y$, und gebe der Gleichung die Form $(x^2 - 5x)^2 - 7(x^2 - 5x) - 12 = 0$. Die beiden Gleichungen $y^2 - 7y - 12 = 0$, $x^2 - 5x - y = 0$ geben alsdann die gesuchten vier Werthe von x, nämlich:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(39 + 2\sqrt{97})}}{2},\ x = \frac{5 \pm \sqrt{(29 - 2\sqrt{97})}}{2}.$$

Angenommen, man wüßte im Voraus, daß die Gleichung $x^6 - 12x^5 + 42x^4 - 1bx^3 - 79x^2 - 68x - 18 = 0$, drei Paare Wurzeln von gleichen Summen habe; so setze man $x^2 - 4x = y$, und gebe jener Gleichung die Form $(x^2 - 4x)^3 - 6(x^2 - 4x)^2 + 17(x^2 - 4x) - 18 = 0$. Alsdann geben die beiden Gleichungen $y^3 - 6y^2 + 17y - 18 = 0$, $x^2 - 4x = y$, die sechs gesuchten Wurzeln. Die drei Werthe von y sind 2, $2 + \sqrt{-5}$, $2 - \sqrt{-5}$; daher hat x nachstehende sechs Werthe:

$$2 \pm \sqrt{6},\ 2 \pm \sqrt{(6 + \sqrt{-5})},\ 2 \pm \sqrt{(6 - \sqrt{-5})}.$$

Mit Hülfe der unbestimmten Coefficienten wird es übrigens immer sehr leicht seyn, der Gleichung die verlangte Form zu geben.

XIX. Unbestimmte oder diophantische Aufgaben.

Kann man aus den Bedingungen einer Aufgabe nicht so viele Gleichungen erhalten, als der gesuchten Größen vorhanden sind, so gehört sie zu den unbestimmten. Es seyen m Gleichungen von der Form $ax + a'x' + a''x'' + a'''x''' +$ ꝛc. $= k$, zwischen den M unbekannten Größen x, x', x'', x''', ꝛc., gegeben, und es sey $M > m$; so wird man durch die Eliminirung von $m - 1$ dieser unbekannten Größen eine Gleichung von der nämlichen Form erhalten, in welcher aber nur noch $M - m + 1$ dieser unbekannten Größen vorhanden seyn werden. Um alsdann eine solche Gleichung aufzulösen, braucht man nur eine dieser unbekannten Größen durch alle übrige auszudrücken, und hierauf diesen letzteren willkührliche Zahlenwerthe beizulegen. Hätte man z. B. die Gleichung $3x + 5x' - 7x'' = 17$, so fände man $x'' = \frac{3x + 5x' - 17}{7}$. Man kann nun x und y' wirklich annehmen, und daraus x'' bestimmen.

Gewöhnlich werden aber noch gewisse andere Bedingungen, welche sich nicht so recht durch Gleichungen darstellen lassen, hinzugefügt, wodurch die Sache um vieles schwieriger wird. Wie z. B. wenn gefordert wird, daß x, x', x'', ꝛc., lauter ganze Zahlen seyn sollen, und wenn noch überdies verlangt wird, daß sie alle positiv seyn sollen, u. s. w. Man kann in diesem Falle immer annehmen, daß die Coefficienten k, a, a', a'', a''', ꝛc., lauter ganze Zahlen seyen; denn im entgegengesetzten Falle kann man die Brüche durch die Multiplikation mit einem Faktor wegschaffen.

Die Gleichung $ax + a'x' = 1$ kann, wenn es zur Bedingung gemacht wird, daß x und x' ganze Zahlen seyn

sollen, entweder auf die in den meisten Lehrbüchern vorgetragene Weise, oder auch mit Hülfe der kontinuirlichen Brüche aufgelöst werden. Das letztere Verfahren beruhet auf den Sätzen VI. VII. S. 113, und ist um vieles leichter als jenes. Hat man auf irgend eine Weise $x=p$, $x'=q$ gefunden, so daß $ap+a'q=1$, so kann man im Allgemeinen $x=p+a'n$, $x'=q-an$ setzen, und hierauf für n jede beliebige ganze, positive oder negative, Zahl annehmen.

Die Gleichung $ax+a'x'=k$ giebt alsdann $x=kp+a'n$, $x'=kq-an$. Die Gleichung $ax+a'x'+a''x''+a'''x'''+$ ꝛc. $=k$ giebt daher $x=(k-a''x''-a'''x'''-$ ꝛc.$)\ p+a'n$, $x'=(k-a''x''-a'''x'''-$ ꝛc.$)\ q-an$, wo nun für n, x'', x''', x'''', ꝛc., alle mögliche ganze, positive oder negative, Zahlen angenommen werden können.

Die obigen m Gleichungen mit M unbekannten Größen sind daher auf die Gleichung $ax+a'x'=1$ zurückgeführt, und diese ist immer möglich, wofern nicht a und a' ein gemeinschaftliches Maaß haben. Unter den Coefficienten a, a', a'', a''', ꝛc. müssen sich, wenn die Gleichung $ax+a'x'+a''x''+$ ꝛc. $=k$ möglich ist, wenigstens zwei finden, welche kein gemeinschaftliches Maaß haben.

....

1) Welche Zahlen lassen durch 3 dividirt 1, und durch 5 dividirt 2 übrig?

Antw. 7, 22, 37, 52, 67, 82, u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $15n+7$.

2) Welche Zahlen lassen durch 8 dividirt 5, und durch 11 dividirt 4 übrig?

Antw. 37, 125, 213, 301, 389, u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $88n+37$.

3) Welche Zahlen gehen durch 9 auf, und lassen durch 14 dividirt 8 zum Reste?

Antw. 36, 162, 288, 414, 540, u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $126n+36$.

4) Eine Bäuerin bringt Eier zu Markte, mehr als hundert, aber weniger als 200. Sie ist unschlüssig, ob sie solche nach Mandeln oder Dutzenden verkaufen soll, denn im ersten Fall bleiben ihr 4, im zweiten gar 10 Eier übrig. Wie viele Eier hat sie demnach?

Antw. 154.

5) Ein Knabe spielt mit Nüssen, deren Zahl zwischen ein und vierhundert fällt, und will daraus einige Häufchen machen. Legt er 13 in jedes Häufchen, so bleiben ihm 9 übrig; legt er aber in jedes 17, so bleiben ihm 14 übrig. Wie viele Nüsse sind es?

Antw. 269.

Gehören die beiden letztern Aufgaben so recht eigentlich zu den unbestimmten?

6) Welche Zahlen lassen, durch 3, 7 und 10 dividirt, nach der Reihe die Reste 2, 3 und 9?

Antw. 59, 269, 479, 689, 899, u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $210n+59$.

7) Welche Zahlen lassen durch 6, 12 und 15 dividirt, nach der Reihe die Reste 1, 1, 10?

Antw. 25, 85, 145, 205, 265, u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $60n+25$.

8) Welche Zahlen lassen, durch 5, 6, 7, 8 dividirt, nach der Reihe die Reste 3, 1, 0, 5?

Antw. 133, 973, 1813, 2653, 3493, u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $840n+133$.

9) Welche Zahlen lassen durch 4, 6, 9, 15 dividirt, für die ersten drei Zahlen den Rest 3, und für die vierte den Rest 12.

Antw. 147, 327, 507, 687, 867, u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $180n + 147$.

10) Ein General wurde gefragt, wie stark sein Regiment sey. Er antwortete: „Mein Regiment, das, beiläufig gesagt, keine 2000 Mann stark ist; kann ich zwar 5, 6 und 7 Mann hoch stellen, ohne daß mir einer übrig bleibt; wollte ich es aber 11 und 13 Mann hoch stellen, so würde ich im ersten Falle 9 Mann zu viel, und im zweiten 8 Mann zu wenig haben." Wie stark war nun das Regiment?

Antw. 1890 Mann.

11) Ein Hauptmann wollte seine Compagnie, die zwischen 100 und 200 Mann hält, aufmarschiren lassen. Läßt er sie zu 2, 4, 8 und 10 Mann aufmarschiren, so bleibt ihm jedesmal einer übrig. Läßt er sie aber zu 6 oder 12 Mann aufmarschiren, so bleiben ihm jedesmal 5 übrig. Wie stark ist seine Compagnie?

Antw. 161 Mann.

12) Ein glücklicher Spieler zählte seine gewonnenen Dukaten zweimal hinter einander, das erstemal nach Würfen von drei Stücken, wo ihm 2 übrig blieben, das zweitemal nach Würfen von fünf Stücken, wo ihm einer übrig blieb. Er setzte sich hierauf von Neuem zum Spiele, verlor sechs Ducaten, und zählte hierauf die übrigen nach 7 und 11; da blieben ihm jedesmal 3 übrig. Wie viele Ducaten hatte er im ersten Spiele gewonnen?

Antw. 86, oder 1241, oder 2396, u. s. w.

13) Es werden zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man die erste mit 17 und die zweite

mit 26 multiplicirt, das erste Produkt um 7 größer sey als das zweite. Welche Zahlen sind es?

Antw. 5 und 3, oder 31 und 20, oder 57 und 37, u. s. w.

14) In einem Gießhause wurden zweierlei Kanonenröhre gegossen. Von der ersten Art wiegt jede 16 und von der zweiten Art 25 Centner; und doch hat man zur zweiten Art einen Centner Metall weniger gebraucht als zur ersten. Wie viele Röhre von jeder Art waren es?

Antw. Von der ersten 11 und von der zweiten 7, oder von der ersten Art 36 und von der zweiten 23, u. s. w.

15) In Wien vertauschte Jemand Siebner gegen Siebzehner, und erhielt noch zwei Gulden oder 120 Kreuzer heraus. Wie viele Siebner und Siebzehner wurden gegen einander vertauscht?

Antw. 22 gegen 2, oder 39 gegen 9, oder 56 gegen 16, u. s. w.

16) Es sollen drei Zahlen von einer solchen Beschaffenheit gefunden werden, daß, wenn man die erste mit 7, die zweite mit 9, und die dritte mit 11 multiplicirt, das erste Produkt um 1 kleiner als das zweite, und um 2 größer als das dritte sey. Welche Zahlen sind es?

Antw. 5, 4, 3; oder 104, 81, 66; oder 203, 158, 129, u. s. w.

17) Eine Anzahl Männer, Weiber und Kinder machen zusammen eine Lustpartie. Ein Mann verzehrt 19, eine Frau 10 und ein Kind 8 Gr. Die Männer haben insgesammt 7 Gr. mehr als die Weiber und 15 Gr. mehr als die Kinder verzehrt. Wie viele Männer, Weiber und Kinder waren es?

Antw. 13 Männer, 24 Weiber und 29 Kinder; oder 53 Männer, 100 Weiber und 124 Kinder; u. s. w.

18) Man soll 142 in zwei solche Theile zerlegen, daß der eine durch 9, der andere durch 14 theilbar sey. Welche Theile sind es?

Antw. 72 und 70.

19) Man soll 1591 in zwei solche Theile zerlegen, daß der eine durch 23, der andere durch 34 theilbar sey. Welche Theile sind es?

Antw. 1081 und 510, oder 299 und 1292.

20) In welche zwei Theile muß man die Zahl 4890 zerlegen, wenn der erste Theil durch 37 dividirt den Rest 3, und der zweite durch 54 dividirt den Rest 6 lassen soll?

Antw. In 780 und 4110, oder in 2778 und 2112, oder in 4776 und 114.

21) Eine Gesellschaft von Männern und Weibern hat zusammen 36 Thlr. 12 Gr. verzehrt. Ein Mann bezahlt 19 und eine Frau 13 Gr. Wie viele Männer und Weiber waren es?

Antw. 3 und 63, oder 16 und 44, oder 29 und 25, oder 42 und 6.

22) Ein Kaufmann kauft Pferde und Ochsen, zusammen für 1770 Thlr., und bezahlt für ein Pferd 31 Thlr., für einen Ochsen aber 21 Thlr. Wie viele Pferde und Ochsen hat er gekauft?

Antw. 9 und 71, oder 30 und 40, oder 51 und 9.

23) Jemand kauft 124 Stück Vieh, nämlich Schweine, Ziegen und Schafe für 400 Thlr. Ein Schwein kostet $4\frac{1}{2}$, eine Ziege $3\frac{1}{8}$, und ein Schaf $1\frac{1}{4}$ Thlr. Wie viel Stück von jeder Gattung sind es?

Antw. 17, 99, 8; oder 40, 60, 24; oder 63, 21, 40.

24) Man soll 30 in drei Theile zerlegen, die so beschaffen sind, daß, wenn man den ersten Theil mit 7, den zweiten mit 19, und den dritten mit 38 multiplicirt, die Summe dieser drei Produkte 745 sey. Welche Theile sind es?

Antw. 6, 11, 13.

25) Man soll 100 in drei Theile von solcher Beschaffenheit zerlegen, daß, wenn man den ersten Theil mit 17, den zweiten mit 11, den dritten mit 3 multiplicirt, und hierauf die drei Produkte addirt, die Summe 880 sey. Welche Theile sind es?

Antw. 2, 69, 29; oder 6, 62, 32; oder 10, 55, 35; u. s. w., in allem 10 verschiedene Fälle.

26) Man sucht drei ganze Zahlen von solcher Beschaffenheit, daß, wenn die erste mit 5, die zweite mit 13, und die dritte mit 16 multiplicirt wird, die Summe der Produkte 997 sey; wenn aber die erste mit 11, die zweite mit 29, und die dritte mit 37 multiplicirt wird, die Summe der Produkte 1866 sey. Welche Zahlen sind es?

Antw. 16, 29, 30.

27) Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück, verkauft, eine Gans für 20, ein Huhn für $10\frac{1}{2}$, eine Ente für 7, und eine Taube für 4 Gr., und insgesammt 29 Thlr. 11 Gr. daraus gelöst. Wie viel Stück hat sie von jeder Gattung?

Antw. 2 Gänse, 46 Hühner, 24 Enten und 4 Tauben, oder 10 Gänse, 30 Hühner, 16 Enten und 20 Tauben; u. s. w.

28) Dreißig Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehren zusammen 58 Thlr.; ein Mann bezahlt 3 Thlr.

12 Gr., eine Frau 1 Thlr. 9 Gr. und ein Kind 6 Gr. Wie viel Männer, Weiber und Kinder waren es?

Antw. 10 Männer, 16 Weiber und 4 Kinder.

29) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe und Produkt gleich ist. Welche Zahlen sind es?

Antw. Bezeichnen x und y die beiden gesuchten Zahlen, so ist x willkührlich und $y = \frac{x}{x-1}$.

30) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe sich zu ihrem Produkte wie m zu n verhalte. Welche Zahlen sind es?

Antw. Bezeichnen x und y die beiden gesuchten Zahlen, so ist x willkührlich und $y = \frac{nx}{mx-n}$.

31) Es werden zwei ganze Zahlen gesucht, deren Summe und Produkt zusammen genommen 139 beträgt. Welche Zahlen sind es?

Antw. 1 und 69, 3 und 34, 4 und 27, 6 und 19, 9 und 13.

32) Es werden zwei ganze Zahlen verlangt, deren Produkt ihren doppelten Unterschied um 100 übertrifft. Welche Zahlen sind es?

Antw. 10 und 10, 14 und 8, 22 und 6, 30 und 5, 46 und 4, 94 und 3.

33) Wie zerlegt man den Bruch $\frac{230}{77}$ in zwei andere Brüche, deren Nenner 7 und 11 sind?

Antw. In $\frac{5}{7}$ und $\frac{25}{11}$, oder in $\frac{12}{7}$ und $\frac{14}{11}$, oder in $\frac{19}{7}$ und $\frac{3}{11}$.

34) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Quadrate, wenn sie addirt werden, wieder eine Quadratzahl geben. Wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Wenn p und q zwei willkührliche Zahlen be-

zeichnen, so ist die eine von den gesuchten Zahlen $= p^2 - q^2$ und die andere $= 2pq$; z. B. 3 und 4, 6 und 8, 5 und 12, u. s. w.

35) Es mögen a und c ein Paar Rationalzahlen bezeichnen: welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, wenn die Formel $a^2x^2 + cy^2$ ein vollkommnes Quadrat seyn soll?

Antw. $x = cn^2 - m^2$, $y = 2amn$; denn es ist $a^2(cn^2 - m^2)^2 + c(2amn)^2 = a^2(cn^2 + m^2)^2$. Für m und n können nun willkührliche Rationalzahlen angenommen werden, wenn a und c bestimmt sind, und es werden sich alsdann daraus die Werthe von x und y ergeben.

36) Welchen Werth kann man der unbestimmten Größe x beilegen, wenn die Formel $a^2x^2 + c$ ein vollkommnes Quadrat werden soll?

Antw. $x = \frac{cn^2 - m^2}{2amn}$; denn es ist $a^2\left(\frac{cn^2 - m^2}{2amn}\right)^2 + c = \left(\frac{cn^2 + m^2}{2mn}\right)^2$.

37) Wenn a, b, c, drei Rationalzahlen bezeichnen: welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, damit die Formel $a^2x^2 + bxy + cy^2$ ein vollkommnes Quadrat werde?

Antw. $x = m^2 - cn^2$, $y = bn^2 - 2amn$; denn es ist $a^2(m^2 - cn^2)^2 + b(m^2 - cn^2)(bn^2 - 2amn) + c(bn^2 - 2amn)^2 = (am^2 - bmn + acn^2)^2$.

38) Welcher Werth kann für x angenommen werden, wenn die Formel $a^2x^2 + bx + c$ ein Quadrat werden soll?

Antw. $x = \frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}$; denn es ist $a^2\left(\frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}\right)^2 + b\left(\frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}\right) + c = \left(\frac{am^2 - bmn + acn^2}{bn^2 - 2amn}\right)^2$.

39) Welchen Werth kann man dem x geben, um die Formel ax^2+bx+c^2 zu einem vollkommnen Quadrate zu machen?

Antw. $x=\frac{bn^2-2cmn}{m^2-an^2}$; denn es ist $a\left(\frac{bn^2-2cmn}{m^2-an^2}\right)^2$ $+b\left(\frac{bn^2-2cmn}{m^2-an^2}\right)+c^2=\left(\frac{cm^2-bmn+acn^2}{m^2-an^2}\right)^2$.

40) Es sey $x=w$ ein Werth des x, für welchen die Formel ax^2+bx+c ein vollkommnes Quadrat wird: wie hat man es anzufangen, um noch mehrere solche Werthe zu finden?

Antw. Man substituire $w+py$ für x in der gegebenen Formel, so wird sich dieselbe in eine andere von der Form fy^2+gy+h^2 verwandeln. Diese Formel wird ein vollkommnes Quadrat, wenn $y=\frac{gn^2-2hmn}{m^2-fn^2}$ gesetzt wird, also die gegebene Formel selbst, wenn $x=w+\frac{p(gn^2-2hmn)}{m^2-fn^2}$ gesetzt wird.

41) Vorausgesetzt, die Formel $ax^2+bxy+cy^2$ lasse sich in zwei rationale Faktoren $mx+ny$, $m'x+n'y$ zerfällen, daß also b^2-4ac ein vollkommnes Quadrat sey: welche Zahlen müssen für x, y angenommen werden, wenn die Formel $ax^2+bxy+cy^2$ ein vollkommnes Quadrat werden soll?

Antw. $x=np^2-n'p^2$, $y=m'q^2-mp^2$; denn alsdann ist $mx+ny=(m'n-mn')q^2$ und $m'x+n'y=(m'n-mn')p^2$, also $ax^2+bxy+cy^2=(mx+ny)(m'x+n'y)=(m'n-mn')^2p^2q^2$.

42) Wie wird die Gleichung $x^2-Ay^2=1$ aufgelöst, wenn A, außer einer Quadratzahl, jede andere beliebige positive Zahl bezeichnet, und es zur Bedingung gemacht wird, daß x und y ganze Zahlen seyn sollen?

Antw. Die Auflösung dieser wichtigen Aufgabe ist in den Sätzen 3 und 4 Seite 119 enthalten. Die Werthe von x und y sind nichts anders als der Zähler und Nenner des daselbst angegebenen Näherungswerthes. Z. B. für $A=106$, ist $x=4005$, $y=389$; für $A=124$, ist $x=4620799$, $y=414960$; für $A=133$, ist $x=2588599$, $y=224460$. Die hier angegebenen sind übrigens die kleinsten Zahlen, welche sich finden lassen. Dieses Verfahren ist zuerst von Lagrange gelehrt worden; es führt immer sicher zum Zwecke, und ist weit leichter als das von Pell, welches Euler giebt.

43) Wenn $x=m$, $y=n$ bekannte Werthe von x und y in ganzen Zahlen sind, welche die Gleichung $x^2-Ay^2=1$ auflösen, worin A eine ganze Zahl ist: wie lassen sich daraus noch andere Werthe von x und y in ganzen Zahlen finden, welche diese Gleichung auflösen?

Antw. $$x=\frac{(m+n\sqrt{A})^p+(m-n\sqrt{A})^p}{2}$$

$$y=\frac{(m+n\sqrt{A})^p-(m-n\sqrt{A})^p}{2\sqrt{A}}$$

Die Irrationalität fällt durch die Entwickelung weg.

Für $p=0$ ist $x=1$, $y=0$

Für $p=1$ ist $x=m$, $y=n$, welches die schon bekannten Werthe sind.

Für $p=2$ ist $x=m^2+An^2$, $y=2mn$.

Für $p=3$ ist $x=m^3+3Amn^2$, $y=3m^2n+An^3$.

Für $p=4$ ist $x=m^4+6Am^2n^2+A^2n^4$, $y=4m^3n+4Amn^3$.

u. s. w.

Wie kann die Aufgabe, die Formel $fx^2+gxy+hy^2$ zu einem Quadrate zu machen, (wenn so etwas überhaupt möglich ist,) auf die Aufgabe, die Gleichung

$x^2 - Ay^2 = 1$ in ganzen Zahlen aufzulösen, zurückgeführt werden?

44) Es sollen drei Zahlen von einer solchen Beschaffenheit gefunden werden, daß sowohl die Summe aller, als auch die Summe von zwei und zwei derselben eine vollkommne Quadratzahl sey. Welche Zahlen mögen dies wohl seyn?

Antw. 41, 80, 320; oder 22, 42, $68\frac{1}{4}$; und unendlich viele andere.

45) Man soll zwei Zahlen von einer solchen Beschaffenheit finden, daß die Differenz dieser Zahlen der Differenz ihrer Cuben gleich sey. Was für dergleichen Zahlen lassen sich wohl angeben?

Antw. $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{7}$, $\frac{8}{13}$ und $\frac{7}{13}$, $\frac{16}{19}$, und $\frac{5}{19}$ und unendlich viele andere.

46) Welche Reste kann eine Quadratzahl übrig lassen, wenn sie durch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, u. s. w. dividirt wird?

Antw. Für 2, 3 und 4 die Reste 0, 1; für 5 die Reste 0, 1, 4; für 6 die Reste 0, 1, 3, 4; für 7 die Reste 0, 1, 2, 4; für 8 die Reste 0, 1, 4; für 9 die Reste 0, 1, 4, 7; für 10 die Reste 0, 1, 4, 5, 6, 9; u. s. w.

Kann die Formel $3x^n + 2$ wohl jemals ein vollkommnes Quadrat werden, wenn für x ganze Zahlen angenommen werden? Kann die Formel $14x^n + 3$ wohl ein solches werden?

47) Welche Reste kann eine Cubikzahl geben, wenn sie die Zahlen 7, 8, 9 dividirt wird?

Antw. Für 7 die Reste 0, 1, 6; für 8 die Reste 0, 1, 3, 5, 7; für 9 die Reste 0, 1, 8.

Können wohl die Formeln $8x^n + 6$, $18x^n + 7$ jemals

vollkommne Cuben werden, wenn für x ganze Zahlen angenommen werden?

48) Wie findet man zwei Zahlen, die so beschaffen sind, daß die Summe ihrer Quadrate ein Produkt von zwei Faktoren sey, deren jeder wieder eine Summe von zwei Quadraten ist?

Antw. Die analytische Gleichung

$$(mm'+nn')^2+(mn'-nm')^2=(m^2+n^2)(m'^2+n'^2)$$

beantwortet diese Frage, worin also für m, n, m', n', alle mögliche ganze oder gebrochene Zahlen angenommen werden können.

49) Wie findet man vier Quadrate von solcher Beschaffenheit, daß ihre Summe ein Produkt zweier Faktoren sey, deren einer eine Summe dreier Quadrate, der andere eine Summe zweier Quadrate ist?

Antw. Die analytische Gleichung

$$(mm'+nn')^2+(mn'-nm')^2+(pm')^2+(pn')^2=$$
$$(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2)$$

erfüllt die Forderung.

50) Wie findet man vier Quadrate, die so beschaffen sind, daß ihre Summe in zwei Faktoren zerlegt werden könne, deren jeder eine Summe dreier Quadrate ist?

Antw. Die analytische Gleichung

$$(mm'+nn'+pp')^2+(mn'-nm')^2+(mp'-pm')^2+$$
$$(np'-pn')^2=(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+n'^2)$$

giebt die Beantwortung dieser Frage.

51) Wie lassen sich vier Quadrate finden, so, daß ihre Summe aus zwei Faktoren zusammengesetzt sey, deren jeder wieder eine Summe von vier Quadraten ist?

Antw. Die analytische Gleichung

$$(mm'+nn'+pp'+qq')^2+(mn'-nm'+pq'-qp')^2$$

$$+(mp'-pm'+qn'-nq')^2+(np'-pn'+mq'-qm')^2 =(m^2+n^2+p^2+q^2)(m'^2+n'^2+p'^2+q'^2)$$

giebt die Beantwortung.

52) Welche Werthe kann man den unbestimmten Größen x, y, beilegen, wenn die Formel x^2+Ay^2 ein Produkt zweier Faktoren von der nämlichen Form werden soll?

Antw. $x=mm'+Ann'$, $y=mn'-nm'$; denn es ist $(mm'+Ann')^2+A(mn'-nm')^2=(m^2+An^2)(m'^2+An'^2)$.

53) Es seyen a, a', a'', ꝛc., die Reste der Zahlen A, A', A'', ꝛc., durch eine Zahl k dividirt, so können diese Zahlen durch die Formen $nk+a$, $n'k+a'$, $n''k+a''$, ꝛc., dargestellt werden, und der Rest des Produktes $AA'A''$ ꝛc. ist folglich derselbe, als der des Produktes $aa'a''$ ꝛc. Wie läßt sich nun hieraus in der Kürze der Rest einer hohen Potenz angeben, wenn sie durch eine Zahl dividirt wird?

Antw. Man zerlege die gegebene Potenz in niedrigere und suche von diesen die Reste; das Produkt dieser Reste durch k dividirt, giebt alsdann den gesuchten Rest. Man kann so von der zweiten anfangen und nach und nach zur vierten, achten, u. s. w. Potenz fortschreiten. Z. B. der Rest von 543^{113} durch 257 dividirt, oder, welches das Nämliche ist, der Rest von 29^{112}, ist $=57$.

. . . .

„Es sey p irgend eine Primzahl, und A eine andere, „nicht durch p theilbare, Zahl: so wird die Potenz A^{p-1}, durch p dividirt, immer 1 zum Rest lassen."

Wie läßt sich dieser in der Zahlenlehre äußerst wichtige Satz erweisen?

. . . .

54) Wenn p eine Primzahl und m irgend eine sehr große Zahl ist, wie läßt sich alsdann, mit Hülfe dieses

Satzes, der Rest einer Potenz A^m noch kürzer, als in der vorigen Aufgabe, finden?

Antw. Es gebe m durch $p-1$ dividirt den Rest r, so ist der Rest von A^m derselbe als der von A^r, und $r < p-1$.

55) In einem Hefte der Berlinischen Monatsschrift fand ich einst einige Aufsätze über die ungeheure Größe der Zahl, welche durch die doppelte Potenz $9^{9^9} = 9^{387420489}$ dargestellt wird. Es wurde da so manches darüber gesagt; und wirklich übersteigt diese Zahl an Größe bei weitem alles, was die kühnste Phantasie zu erreichen vermag, denn sie wird, nach meiner Rechnung, mit nicht weniger als 369693100 Ziffern geschrieben, wie sich leicht durch Logarithmen finden läßt. Was mag denn nun aber wohl diese ungeheure Zahl für Reste lassen, wenn man sie durch die Primzahlen 11, 13, 17, 19 dividirt?

Antw. Für 11 den Rest 5, für 13 den Rest 3, für 17 den Rest 9, und für 19 den Rest 16.

56) Welchen Rest läßt die Potenz $A^{\frac{p-1}{2}}$ durch p dividirt, wenn p eine Primzahl und A durch p nicht theilbar ist?

Antw. Entweder $+1$ oder -1, also entweder 1 oder $p-1$.

57) Wenn p eine Primzahl ist, und $a, b, c, d \cdots\cdots t, u$, ganze positive oder negative Zahlen sind, wie viele ganze Werthe des x zwischen 0 und p giebt es höchstens, welche die Formel $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots\cdots + tx + u$ durch p theilbar machen können?

Antw. Höchstens m, wofern nicht etwa alle Coefficienten $a, b, c, \cdots u$, zugleich durch p theilbar sind, in welchem Falle jeder Werth von x ein Genüge thut. Warum?

Wie lassen sich aus den zwischen 0 und p fallenden

Werthen des x, welche jene Formel durch p theilbar machen, alle andere Werthe, welche ebenfalls diese Eigenschaft besitzen, durch eine begränzte Anzahl von Formen darstellen?

58) Wenn für x, y, nur ganze Rationalzahlen angenommen werden dürfen, kann die Formel $ax^2 + bxy + cy^2$, worin a, b, c, gegebene Zahlen sind, nicht jede ganze Zahl ohne Unterschied darstellen, sondern nur eine gewisse Classe von ganzen Zahlen, welche sich dieser Form anschmiegen. Wie läßt sich nun aber eine solche Formel in eine andere $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$ verwandeln, welche die Eigenschaft besitzt, daß sie alle Zahlen darstellt, welche durch jene dargestellt werden können, und umgekehrt, daß alle Zahlen, welche diese begreift, auch von jener begriffen werden?

Antw. Man nehme zwei ganze Zahlen m, n, nach Belieben, welche aber kein gemeinschaftliches Maaß haben dürfen; bestimme hierauf ein Paar andere m', n', welche die unbestimmte Gleichung $mn' - nm' = \pm 1$ auflösen, dergleichen es, wie man weiß, unendlich viele giebt; setze hierauf $x = mx' + ny'$, $y = m'x' + n'y'$, und substituire diese Werthe in der Formel $ax^2 + bxy + cy^2$, so wird sich diese in eine andere $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$ verwandeln, welche die verlangte Eigenschaft besitzt.

Merkwürdig ist es, daß immer $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c'$ seyn wird. — Warum? — Man pflegt die Größe $b^2 - 4ac$ die Bestimmmende zu nennen, weil von ihr die Natur der Formel abhängt. Sie ist auch zugleich diejenige Größe, welche durch ihr Vorzeichen erkennen läßt, ob die Formel $ax^2 + bxy + cy^2$ in zwei reelle Faktoren $kx + ly$, $k'x + l'y$ zerlegbar ist, oder nicht.

....

Die diophantischen Aufgaben gehören zu demjenigen schönen und interessanten Theil der reinen Arithmetik, wo die Zahlen nicht in Hinsicht auf ihre allgemeinen Beziehungen, welche ihnen als Größen zukommen, sondern in Hinsicht auf die besondern Eigenschaften, wodurch sie sich von einander unterscheiden, betrachtet werden. Wer sich darüber vollständig zu belehren wünscht, wird die letzten Capitel in Eulers Algebra, die Théorie des nombres von Legendre, und die Disquisitiones arithmeticae von Gauß lesen.

Bei dem Lesen der beiden angeführten Werke von Gauß und Legendre mache ich besonders auf einen Satz aufmerksam, der unter dem Namen des Satzes der Reciprocität bekannt ist, von welchem Gauß, außer dem Beweise, welcher sich in seinem Werke findet, auch noch einen andern einfachern gegeben hat, den Legendre in die zweite Auflage seines Werkes aufgenommen hat. Ob er sich noch irgendwo anders befindet, ist mir nicht bekannt worden. Er lautet wie folgt:

Wenn p und q irgend zwei Primzahlen sind, so ist der Rest von $q^{\frac{p-1}{2}}$ durch p dividirt derselbe, als der von $p^{\frac{q-1}{2}}$ durch q dividirt, nämlich beide $+1$, oder beide -1, wenn die Primzahlen p, q, nicht zugleich von der Form $4n+3$ sind. Sind sie hingegen beide von der Form $4n+3$, so sind die Reste einander entgegengesetzt; der eine ist nämlich $+1$, wenn der andere -1 ist, und umgekehrt.

Die 58ste Aufgabe ist die Grundlage einer sehr ausgedehnten Theorie der trinomischen Faktoren, worüber sich in den beiden obigen Werken sehr Vieles, und mitunter auch Neues findet.

XX. Aufgaben, die Progressionen und figurirten Zahlen betreffend.

1) Ein Herr miethet einen Bedienten und verspricht ihm an Lohn für das erste Jahr nur 30 Thlr., für jedes folgende Jahr aber immer $4\frac{1}{2}$ Thlr. mehr als für das vorhergehende. Wie viel wird der Bediente das 17te Jahr nach dem Antritte seines Dienstes, und wie viel für alle 17 Jahre überhaupt erhalten?

Antw. 102 Thlr. und 1122 Thlr.

2) Wenn jemand heute 2 Thlr. ausgiebt, und seine Ausgaben täglich um $4\frac{1}{2}$ Gr. vermehrt: wie viel werden seine Ausgaben den 16ten Tag, den heutigen für den ersten gerechnet, betragen? Und wie viel wird er in den 16 Tagen überhaupt ausgeben?

Antw. 4 Thlr. $19\frac{1}{2}$ Gr., und 54 Thlr. 12 Gr.

3) Einen Brunnen von 30 Fuß Tiefe zu graben, zahlt man für den ersten Fuß 17 Gr. und für jeden folgenden Fuß immer 2 Pf. mehr als für den vorhergehenden. Wie viel zahlt man für den letzten? Und wie viel für den ganzen Brunnen?

Antw. 21 Gr. 10 Pf., und 24 Thlr. 6 Gr. 6 Pf.

4) Wenn 3500 Thlr. zu 4 Procent auf Zinsen gegeben werden, und jedes Jahr 300 Thlr. Capital zugelegt wird: wie viel betragen alsdann die Zinsen von 24 Jahren des ursprünglichen Capitals und der jährlich hinzugefügten 300 Thlr.?

Antw. 6672 Thlr.

5) Ein Reisender, der in 19 Tagen an seinem Bestimmungsorte zu seyn wünscht, beschleunigt seine Reise so sehr, daß er jeden Tag eine Viertelmeile mehr macht, als den vorhergehenden. Wenn er nun den letzten Tag $14\frac{1}{2}$

Meilen zurückgelegt: wie viele Meilen machte er den ersten Tag? Und wie viele Meilen beträgt seine ganze Reise?

Antw. 10 Meilen und $232\frac{3}{4}$ Meilen.

6) Wie groß ist die Differenz einer arithmetischen Progression von 22 Gliedern, deren erstes Glied 1 und letztes Glied 15 ist?

Antw. $\frac{2}{3}$.

7) Aus wie vielen Gliedern bestehet eine arithmetische Progression, deren Differenz 3, erstes Glied 5, und letztes Glied 302 ist?

Antw. Aus 100 Gliedern.

8) Jemand, der nach seinem Gehalte gefragt wurde, antwortete: „Jetzt habe ich 550 Thlr.; beim Antritte meines Amtes hingegen hatte ich nicht mehr als 100 Thlr., erhielt aber, meines Fleißes wegen, jedes Jahr eine Zulage von 30 Thlr." Wie lange ist dieser Mann schon im Amte?

Antw. 16 Jahre.

9) Ein Schuldner wird mit seinem Gläubiger einig, seine Schuld von 12950 Thlr., welche auf einmal zu bezahlen er sich außer Stand siehet, in monatlichen Terminen abzutragen, und zwar den ersten Monat 600 Thlr., jeden folgenden Monat aber progressive 50 Thlr. mehr. In wie vielen Monaten wird er seine ganze Schuld abgetragen haben? Und wie viel hat er den letzten Monat zu entrichten?

Antw. In 14 Monaten und 1250 Thlr.

10) Die Physik lehrt, daß jeder Körper, der im luftleeren Raum fällt, in der ersten Sekunde seines Fallens einen Raum von ungefähr $15\frac{5}{8}$ Fuß durchläuft, in jeder

folgenden Sekunde aber immer $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr als in der zunächst vorhergehenden. Wenn nun ein Körper 20 Sekunden gefallen ist; wie viel Fuß wird er in der letzten Sekunde zurücklegen? Und wie viel in der ganzen Zeit?

Antw. $609\frac{3}{8}$ Fuß und 6250 Fuß.

11) Wie lange muß hingegen, bei den in der vorigen Aufgabe angegebenen Bestimmungen, ein Körper fallen, um einen Raum von 4000 Fuß zurück zu legen?

Antw. 16 Sekunden.

12) Als in einer Gesellschaft von häuslicher Oekonomie die Rede war, sagte jemand: „Ich habe in diesem Jahre 78 Thlr. erspart, auch mir überhaupt schon ein Vermögen von 1350 Thlr. gesammelt, und zwar dadurch, daß ich, seit dem Antritte meines Dienstes bis jetzt, alle Jahr 2 Thlr. mehr von meinem Gehalte zurücklegte." Wie lange ist es her, daß dieser Mann seinen Dienst erhielt? Und wie viel hatte er das erste Jahr erspart?

Antw. 25 Jahre und 30 Thlr.

13) Jemand wurde von seinem Richter zu einer Geldstrafe von 800 Thlr. verurtheilt, welche in Terminen abgetragen werden soll, und zwar den ersten Termin 20 Thlr., in jedem folgenden Termine aber immer etwas Unveränderliches mehr als in dem vorhergehenden Termine, so daß in dem letzten Termine 80 Thlr. zu entrichten sind. In wie vielen Terminen wird das ganze Strafgeld abgetragen seyn? Und wie viel war das Unveränderliche, das er in jedem Termine mehr bezahlen sollte?

Antw. 16 Termine und 4 Thlr.

14) Jemand siehet in einem Zeughause 15 Reihen Kanonenkugeln über einander liegen, und fragt einen neben ihm stehenden Bombardier: wie viele Kugeln in der unter-

sten von diesen Reihen wären? „Das können Sie leicht berechnen," erwiederte der Bombardier: „Es liegen in allen diesen Reihen zusammen 4200 Kugeln, und jede Reihe, von der ersten bis zur letzten, enthält immer 20 Kugeln weniger als die, welche unter ihr liegt." Wie viele Kugeln liegen demnach in der untersten Reihe?

Antw. 420.

15) Ein Meteorolog findet unter seinen Beobachtungen die merkwürdige Erscheinung angeführt, daß, vom 8ten bis zum 19ten Juni eines gewissen Jahres, das Thermometer täglich um einen halben Grad stieg, und daß das arithmetische Mittel von diesen zwölf verschiedenen Thermometerständen $18\frac{3}{4}$ Grad war. Auf welchem Grade stand es den achten?

Antw. Auf dem 16ten Grad.

16) Eine Compagnie wurde für die gelungene Bestürmung einer Festung so belohnt, daß derjenige Soldat, welcher den Wall am ersten erstiegen hatte, eine gewisse Summe Geldes erhielt, der zweite um etwas weniger, der dritte gerade um eben so viel weniger als der zweite, u. s. f. Als das Geld ausgetheilt wurde, konnten zwei dieser Soldaten wegen Blessuren nicht zugegen seyn; man gab daher ihren Antheil zweien ihrer Cameraden. Diese zwei steckten sowohl ihr eigenes Geld, als auch jenes ihrer zwei Cameraden, in einen einzigen Sack zusammen, und wußten nachher bei der Theilung nicht mehr, was jedem gebühre. Der eine hatte für sich und seinen Cameraden 92 Thlr. erhalten, und erinnerte sich nur noch, daß er der zweite und sein blessirter Camerad der siebente gewesen sey; der andere hatte für sich und seinen Cameraden 71 Thlr. erhalten, und wußte, daß er der eilfte, sein Camerad aber der vierte ge-

wesen sey. Wie viel gebührt nun jedem dieser vier Soldaten?

Antw. Dem zweiten $54\frac{3}{4}$, dem vierten $47\frac{3}{4}$, dem siebenten $37\frac{1}{4}$, und dem eilften $23\frac{1}{4}$.

17) Man hat achtzehn Zahlen, die in arithmetischer Progression stehen. Werden die beiden mittelsten addirt, so kommt $31\frac{1}{2}$; wird aber die erste und letzte mit einander multiplicirt, so erhält man $85\frac{1}{2}$. Wie groß ist die erste Zahl und die Differenz dieser Progression?

Antw. 3 und $1\frac{1}{2}$.

18) Zwei Personen reisen, einer Zusammenkunft halber, zu gleicher Zeit und auf derselben Tour von zweien Oertern A und B ab, welche 170 Meilen von einander entfernt liegen. Der von B abgegangene macht regelmäßig täglich 4 Meilen; der andere aber den ersten Tag nur 2 Meilen, jeden folgenden Tag jedoch unausgesetzt eine halbe Meile mehr als an dem vorhergehenden. Wo werden sie zusammenkommen?

Antw. 102 Meilen von A.

19) Jemand genießt ein jährliches Gehalt von 500 Thlr., wovon er aber nichts ausgiebt, sondern dasselbe an dem Tage, wo er es jedesmal ausgezahlt erhält, von dem heutigen Tage an, wo er es zum erstenmal beziehet, sogleich zu 5 Procent unterbringt, die Zinsen aber ebenfalls unberührt läßt. Nach wie vielen Jahren wird nun der Mann aus dieser Quelle 6875 Thlr. zusammen haben, Zins von Zinsen jedoch nicht gerechnet?

Antw. Nach 10 Jahren.

20) In den Zeughäusern werden bisweilen die Kugeln nach dreiseitigen Pyramiden aufgeschichtet, nämlich so, daß die oberste Kugel an der Spitze von drei Kugeln, diese

drei von 6, diese 6 Kugeln wieder von 10, u. s. w. getragen werden; oder mit einem Worte, daß die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten, von der obersten an gerechnet, durch die Dreieckzahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, u. s. w. angegeben werden. Wie viele Kugeln werden sich nun in der untersten dreiseitigen Schicht befinden, wenn die Seite derselben n Kugeln enthält? Und wie viele Kugeln werden sich in der ganzen Pyramide befinden?

Antw. $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ in der untersten Schichte, und $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ in der ganzen Pyramide.

Beisp. Für $n=30$ liegen in der untersten Schicht $\frac{30 \cdot 31}{1 \cdot 2}=465$ Kugeln, und in der ganzen Pyramide $\frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3}=4960$ Kugeln.

21) Wenn nun aber die Pyramide in der vorigen Aufgabe unvollständig ist, und auf jeder Seite der höchsten Schichte m Kugeln liegen: wie viele Kugeln werden sich alsdann in dem Haufen befinden?

Antw. $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

22) Bisweilen werden aber auch die Kugeln nach vierseitigen Pyramiden aufgeschichtet, so daß die Schichten sämmtlich Quadrate bilden, und die Kugeln in den verschiedenen Schichten, von der obersten an gerechnet, durch die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, ꝛc., angegeben werden. Wenn nun in jeder Seite der untersten Schichte n Kugeln, also n^2 Kugeln unten liegen: wie viele Kugeln werden in der vollständigen Pyramide aufgehäuft seyn? Und wie viele in der unvollständigen, wenn die Seite der obersten Schichte m Kugeln enthält?

Antw. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ in der vollständigen, und $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ in der unvollständigen.

23) Wenn viele Kugeln aufzuschichten sind, so giebt man den Schichten gewöhnlich die Form von Rechtecken. In der obersten befindet sich alsdann nur eine Reihe von m Kugeln; diese ruhen auf zwei Reihen jede von $m+1$ Kugeln; diese wieder auf drei Reihen jede von $m+2$ Kugeln; u. s. w.; nämlich in jeder folgenden Schichte eine Reihe, und in jeder Reihe eine Kugel mehr. Bei dieser Anordnung werden also die Schichten nach der Ordnung folgende Anzahl von Kugeln enthalten: m, $2(m+1)$, $3(m+2)$, $4(m+3)$, $5(m+4)$, u. s. w., also in der $n$ten Schichte $n(m+n-1)$. Wie viele Kugeln werden nun in dem ganzen Haufen von n Schichten liegen?

Antw. $\frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ *).

24) Aus solchen in Rechtecken geformten Schichten pflegt man auch noch eine andere Art von Kugelhaufen zu bilden, welche aber zu ihrem Gleichgewichte erfordern, daß sie an zwei Seiten an andere Kugelhaufen angelehnt, oder auf sonst eine Art unterstützt werden. Es liegen nämlich oben m Kugeln in einer Reihe; darunter zwei Reihen jede von $m-1$ Kugeln: unter diesen drei Reihen jede von $m-2$ Kugeln, u. s. w.; so daß die Kugeln in den verschiedenen Schichten durch die folgenden Zahlen gegeben

*) Von der Richtigkeit dieser und der folgenden Formel kann man sich auf die, Seite 105 Anmerk. angeführte, Art überzeugen, oder sie auch mit Hülfe der unbestimmten Coefficienten finden.

sind: m, $2(m-1)$, $3(m-2)$, $4(m-3)$, $5(m-4)$, u. s. w.; und also in der $n$ten Schicht $n(m-n+1)$ Kugeln zu liegen kommen. Wie viele Kugeln werden sich nun in einem solchen Haufen von n Schichten befinden?

Antw. $\frac{n(n+1)\ (3m-2n+2)}{1 \cdot 2\ \ \cdot\ \ 3}$

25) Kann ein solcher Haufen nur von der einen Seite angelehnt werden, so giebt man gewöhnlich jeder folgenden Schicht zwar eine Reihe mehr, läßt aber die Anzahl der Kugeln in jeder Reihe unverändert. Es wird alsdann die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten nach der Ordnung durch nachstehende Zahlen gegeben: m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, u. s. w., also in der $n$ten Schichte nm Kugeln. Wie viele Kugeln liegen alsdann in einem solchen Haufen?

Antw. $\frac{mn(n+1)}{1 \cdot 2}$.

26) Wenn die Anzahl der Kugeln in einer vollständigen dreiseitigen Pyramide $= s$ gegeben ist: welche Gleichung hat man aufzulösen, um daraus die Anzahl der Schichten, oder die Anzahl der Kugeln in der Seite der untersten Schicht zu bestimmen?

Antw. Die Gleichung $n^3 + 3n^2 + 2n - 6s = 0$.

27) Welche Gleichung aber für eine vierseitige Pyramide?

Antw. $2n^3 + 3n^2 + n - 6s = 0$.

28) Jemand setzt 6 Pf. in die Lotterie, und da er das erstemal nicht gewinnt, so setzt er das zweitemal 1 Gr. 6 Pf., und da er auch diesmal nicht gewinnt, das drittemal 4 Gr. 6 Pf., kurz, bei jedem neuen Einsatze immer dreimal so viel als bei dem vorhergehenden. Wie viel wird er, wenn

er so fortfährt, das zwölftemal setzen? Und wieviel muß er alsdann gewinnen, wenn er alles Geld, was er bis dahin gesetzt hat, wieder erhalten will?

Antw. 3690 Thlr. 13 Gr. 6 Pf. und 5535 Thlr. 20 Gr.

29) Ein König in Indien, Namens Sheran, verlangte, nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Asephad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Weizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte, und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viele Körner als für das vorhergehende gerechnet werden. Als gerechnet wurde, fand man, zum Erstaunen des Königs, eine ungeheuere Summe. — Welche?

Antw. 18446744073709551615; eine Summe, welche auf der ganzen Erde, nach einer mäßigen Berechnung, erst in mehr als 70 Jahren gewonnen werden könnte, wenn man auch alles feste Land zum Anbau von Weizen benutzte.

30) Jemand säete eine Metze Weizen aus, und benutzte die ganze Erndte zur Aussaat für das folgende Jahr, die Erndte dieses zweiten Jahres wieder zur Aussaat für das dritte Jahr, u. s. w. Wenn er nun im zehnten Jahre 1048576 Metzen erndtet, um wie vielmal muß sich das Saatkorn bei jeder Erndte vermehrt haben, vorausgesetzt, daß diese Vermehrung immer dieselbe blieb?

Antw. Viermal.

31) In einem ruhigen und friedlichen Ländchen vermehrte sich die Volksmenge alle Jahre in einem immer gleichen Verhältnisse, und zwar so stark, daß die Bevölkerung in einem Zeitraume von vier Jahren von 10000 auf 14641

Seelen anwuchs. Um welchen Theil nahm die Volksmenge jährlich zu?

Antw. Um den zehnten Theil.

32) Zwischen 1 und 3 sollen 10 Glieder so eingeschältet werden, daß eine geometrische Progression von 12 Gliedern entstehe. Was wird das zweite Glied dieser Progression seyn?

Antw. $\sqrt[11]{3}=1{,}105\cdots\cdot\cdot$

33) Was für einen Exponenten hat eine geometrische Progression von 32 Gliedern, deren erstes Glied 5, und deren letztes Glied 80 ist? Wie groß ist die Summe dieser Progression? Und wie groß das zwanzigste Glied derselben?

Antw. Der Exponent ist 1,0935·········; die Summe 881,62······; das zwanzigste Glied 27,351······

34) Es giebt sieben Zahlen, die eine geometrische Progression bilden, und die so beschaffen sind, daß wenn man die ersten sechs addirt, die Summe $157\frac{1}{2}$, wenn man aber die letzten sechs addirt, die Summe 315 herauskommt. Welche Zahlen sind es?

Antw. $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

35) In einer geometrischen Progression von 5 Gliedern kennt man die Summe der geraden Glieder $=a$, und die Summe der ungeraden Glieder $=b$: welche Progression ist es?

Antw. Es seyen A, B, C, D, E, die fünf Glieder der gesuchten Progression, so ist das Mittelglied $C=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}$; hieraus ferner $A=\frac{[a-\sqrt{(a^2-4C^2)}]^2}{4C}$,

$B=\frac{a-\sqrt{(a^2-4C^2)}}{2}$, $D=\frac{a+\sqrt{(a^2-4C^2)}}{2}$,

$E=\frac{[a+\sqrt{(a^2-4C^2)}]^2}{4C}$

er so fortfährt, das zwölftemal setzen? Und wieviel muß er alsdann gewinnen, wenn er alles Geld, was er bis dahin gesetzt hat, wieder erhalten will?

Antw. 3690 Thlr. 13 Gr. 6 Pf. und 5535 Thlr. 20 Gr.

29) Ein König in Indien, Namens Sheran, verlangte, nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Asephad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Weizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte, und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viele Körner als für das vorhergehende gerechnet werden. Als gerechnet wurde, fand man, zum Erstaunen des Königs, eine ungeheuere Summe. — Welche?

Antw. 18446744073709551615; eine Summe, welche auf der ganzen Erde, nach einer mäßigen Berechnung, erst in mehr als 70 Jahren gewonnen werden könnte, wenn man auch alles feste Land zum Anbau von Weizen benutzte.

30) Jemand säete eine Metze Weizen aus, und benutzte die ganze Erndte zur Aussaat für das folgende Jahr, die Erndte dieses zweiten Jahres wieder zur Aussaat für das dritte Jahr, u. s. w. Wenn er nun im zehnten Jahre 1048576 Metzen erndtet, um wie vielmal muß sich das Saatkorn bei jeder Erndte vermehrt haben, vorausgesetzt, daß diese Vermehrung immer dieselbe blieb?

Antw. Viermal.

31) In einem ruhigen und friedlichen Ländchen vermehrte sich die Volksmenge alle Jahre in einem immer gleichen Verhältnisse, und zwar so stark, daß die Bevölkerung in einem Zeitraume von vier Jahren von 10000 auf 14641

Seelen anwuchs. Um welchen Theil nahm die Volksmenge jährlich zu?

Antw. Um den zehnten Theil.

32) Zwischen 1 und 3 sollen 10 Glieder so eingeschältet werden, daß eine geometrische Progression von 12 Gliedern entstehe. Was wird das zweite Glied dieser Progression seyn?

Antw. $\sqrt[11]{3} = 1,105\ldots\ldots$

33) Was für einen Exponenten hat eine geometrische Progression von 32 Gliedern, deren erstes Glied 5, und deren letztes Glied 80 ist? Wie groß ist die Summe dieser Progression? Und wie groß das zwanzigste Glied derselben?

Antw. Der Exponent ist 1,0935.........; die Summe 881,62......; das zwanzigste Glied 27,351......

34) Es giebt sieben Zahlen, die eine geometrische Progression bilden, und die so beschaffen sind, daß wenn man die ersten sechs addirt, die Summe $157\frac{1}{2}$, wenn man aber die letzten sechs addirt, die Summe 315 herauskommt. Welche Zahlen sind es?

Antw. $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

35) In einer geometrischen Progression von 5 Gliedern kennt man die Summe der geraden Glieder $= a$, und die Summe der ungeraden Glieder $= b$: welche Progression ist es?

Antw. Es seyen A, B, C, D, E, die fünf Glieder der gesuchten Progression, so ist das Mittelglied $C = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4a^2)}}{2}$; hieraus ferner $A = \frac{[a - \sqrt{(a^2 - 4C^2)}]^2}{4C}$,

$B = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4C^2)}}{2}$, $\quad D = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4C^2)}}{2}$,

$E = \frac{[a + \sqrt{(a^2 - 4C^2)}]^2}{4C}$

36) Die Summe der geraden Glieder einer geom. Progression von vier Gliedern ist $= a$, die Summe der ungeraden Glieder $= b$: welche Progression ist es:

Antw. Der Exponent der Progression ist $= \frac{a}{b}$, das erste Glied $= \frac{b^3}{a^2 + b^2}$, woraus sie sich finden läßt.

37) Die Summe der geraden Glieder einer geom. Progression von $2n$ Gliedern ist $= a$, die Summe der ungeraden Glieder $= b$: welche Progression ist es?

Antw. Der Exponent ist $= \frac{a}{b}$, das erste Glied

$$= \frac{b^{2n-1}}{a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + a^{2n-6}b^4 + \cdots\cdots\cdots + b^{2n-2}}$$

$$= \frac{b^{2n-1}(a^2 - b^2)}{a^{2n} - b^{2n}}.$$

38) In einer geom. Progression von sechs Gliedern kennt man die Summe der beiden mittlern Glieder $= a$, die Summe der beiden äußern Glieder $= b$: wie wird sie gefunden?

Antw. Es sey p das Produkt der beiden Mittelglieder, so ist $p = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{5a \pm \sqrt{(4ab + 5a^2)}}{5a - b}$. Aus p und a erhält man die beiden Mittelglieder $\frac{1}{2}[a - \sqrt{(a^2 - 4p)}]$, $\frac{1}{2}[a + \sqrt{(a^2 - 4p)}]$, und hieraus ferner die gesuchte Progression.

39) In einer geom. Progression kennt man die Summe der Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$, und die Summe ihrer Cuben $= c$: wie wird sie gefunden?

Antw. Der Exponent e der Progression ist

$$= \frac{a^4 + 2ac - 3b^2 \pm \sqrt{12a(ac - b^2)(a^3 - c)}}{a^4 + 3b^2 - 4ac},$$ das erste

Glied $= \frac{b(1 + e) + a^2(1 - e)}{2a}$. Aus dem Exponenten,

dem ersten Gliede und der Summe der Glieder läßt sich nun die Anzahl der Glieder und die Progression selbst finden.

40) In einer geom. Progression ist die Summe der Glieder $=a$, die Summe ihrer Quadrate $=b$, und die Summe ihrer Biquadrate $=c$: wie wird sie gefunden?

Antw. Der Exponent e der Progression ist

$$=\frac{a^4b-b^2\pm2a\sqrt{(c-a^2b)(b^3-a^2c)}}{b^2+a^4b-2a^2c},$$ das erste Glied

$$=\frac{b(1+e)+a^2(1-e)}{2a}.$$ Hieraus läßt sich die Anzahl der Glieder und die Progression selbst finden.

41) Die Differenz einer arithmetischen Progression von vier Gliedern sey $=d$; das Produkt aller Glieder derselben $=a$. Wie findet man das erste Glied?

Antw. Das erste Glied sey $=x$, das Produkt der beiden äußern Glieder $=y$; so ist $x^2+3dx=y$, und die unbekannte Größe y durch die Gleichung $y^2+2d^2y=a$ gegeben. Hieraus ergeben sich nachstehende vier Werthe von x:

$$x=-\tfrac{3}{2}d\pm\sqrt{[\tfrac{5}{4}d^2+\sqrt{(a+d^4)}]},$$
$$x=-\tfrac{3}{2}d\pm\sqrt{[\tfrac{5}{4}d^2-\sqrt{(a+d^4)}]}.$$

42) Die Differenz einer arithmetischen Progression von sechs Gliedern sey $=d$; das Produkt aller Glieder derselben $=a$. Wie findet man das erste Glied?

Antw. Das erste Glied sey $=x$, das Produkt der beiden äußern Glieder $=y$; so ist $x^2+5dx=y$, und die unbekannte Größe y durch die Gleichung $y^3+10d^2y^2+24d^4y=a$ gegeben.

Allgemein genommen, läßt sich die Aufgabe: „Eine arithmetische Progression von $2m$ Gliedern mit der gegebenen Differenz d von einer solchen Beschaffenheit zu finden, daß das Produkt aller Glieder derselben einer gegebenen

Größe a gleich sey," auf die Auflösung einer Gleichung des zweiten und des $m$ten Grades zurückführen. Denn man darf nur $x^2 + (2m - 1) dx = y$ setzen, so wird man für y eine Gleichung des $m$ten Grades finden. (M. vergl. die Aufgabe 35. S. 253 mit dieser.)

XXI. Aufgaben aus der Zins- und Rentenrechnung, nebst einigen andern dahin gehörigen. *)

1) Ein Capital a stehet auf Zinseszinsen; der Zinsfuß ist $= p$. Was wird aus diesem Capitale nach n Jahren?
Antw. ap^n.

2) Ein Capital von 5000 Thlr. stehet auf Zinseszinsen zu 4 Procent. Was wird daraus nach 40 Jahren?
Antw. 24005,103··· Thlr., oder 24005 Thlr. 2 Gr. 6 Pf. ungefähr.

3) Was wird aus 3200 Thlr. zu 3 Procent nach 80 Jahren?
Antw. 34050,84···· Thlr.

4) Ein Forstrevier ist zu 32500 Klaftern abgeschätzt worden, und man weiß aus der Erfahrung, daß 100 Klafter sich jährlich um 3 Klafter vermehren. Wie viele Klafter

*) Ich gebe hier bloß Aufgaben für die zusammengesetzte Zinsrechnung, d. h. für diejenige, bei welcher angenommen wird, daß die Zinsen jährlich zum Capitale geschlagen werden, und wieder von Neuem Zinsen tragen, weil die Kenntniß der einfachen Zinsrechnung schon vorausgesetzt wird.

wird dieses Revier, wenn es geschont wird, nach 24 Jahren enthalten?

Antw. 66065,808....

5) In einer gewissen Provinz zählt man gegenwärtig 200000 Menschen. Wenn nun die Bevölkerung jährlich um den funfzigsten Theil zunimmt: wie groß wird sie nach 100 Jahren seyn?

Antw. 1448927 beinahe.

6) Was wird aus einem Capital von 12000 Thlr. nach 10 Jahren, wenn dasselbe 6 Procent trägt, und die Zinsen halbjährlich bezahlt werden?

Antw. 21673 Thlr. 8 Gr. ungefähr.

7) Wie lange müssen 3600 Thlr. zu 5 Procent auf Zinseszinsen stehen, um eben so viel zu werden als 5000 Thlr. zu 4 Procent in 12 Jahren?

Antw. Beinahe 16 Jahre.

8) Wie lange muß ein Capital a zu dem Zinsfuße p stehen, um eben so viel zu werden, als ein Capital a' zu dem Zinsfuße p' nach n Jahren?

Antw. $\frac{\log a' + n \log p' - \log a}{\log p}$ Jahre.

9) Wie groß muß ein Capital seyn, welches zu 4 Procent stehet, wenn dasselbe nach 15 Jahren eben so viel werth seyn soll, als 4500 Thlr. zu 6 Procent nach 9 Jahren?

Antw. 4221 Thlr. ungefähr.

10 Wie groß muß ein Capital a seyn, wenn es, zum Zinsfuße p gerechnet, nach n Jahren eben so viel werth seyn soll, als ein Capital a' nach n' Jahren zum Zinsfuße p'?

Antw. $\log a = \log a' + n' \log p' - n \log p$. Mittelst dieser Gleichung wird zuerst $\log a$, und hieraus ferner das Capital a gefunden.

11) Wie groß muß hingegen der Zinsfuß p seyn, wenn ein Capital a nach n Jahren eben so viel werden soll, als ein Capital a' nach n' Jahren zum Zinsfuße p'?

Antw. $\log p = \frac{\log a' + n' \log p' - \log a}{n}$.

12) Eine Schuld von 7963 Thlr. ist zu 5 Procent verzinset. Wenn nun hierauf nach fünf Jahren 576 Thlr., und nach 8 Jahren 498 Thlr. abgetragen wird: wie groß ist der Rest der Schuld nach zehn Jahren, wenn überall die Zinseszinsen mit in Anschlag gebracht werden?

Antw. 11696 Thlr. ungefähr.

13) Wie viel betragen die halbjährlichen Zinsen eines Capitals, wenn die jährlichen zu 5 Procent gerechnet, und die Zinseszinsen dabei in Anschlag gebracht werden? Wie viel betragen ferner, bei der nämlichen Voraussetzung, die vierteljährlichen Zinsen?

Antw. Die halbjährlichen 2,4695, und die vierteljährlichen 1,2272 Procent beinahe.

14) Wie viel betragen für den Zinsfuß p die $\frac{1}{n}$teljährlichen Zinsen?

Antw. $100(\sqrt[n]{p} - 1)$ Procent.

15) Wie lange muß ein Capital zu 4 Procent auf Zinseszinsen stehen, wenn es sich verdoppeln soll? Und wie lange, wenn es dreimal so groß werden soll?

Antw. Zwischen 17 und 18 Jahre, wenn es doppelt so groß, und zwischen 28 und 29 Jahre, wenn es dreimal so groß werden soll.

16) Wie lange muß es zum Zinsfuße p stehen, wenn es $m$mal so groß werden soll?

Antw. $\frac{\log m}{\log p}$ Jahre.

17) Ein Wucherer leihet jemand 600 Thlr. und läßt sich darüber einen Schuldbrief über 800 Thlr., nach drei Jahren ohne Zinsen zahlbar, ausstellen. Wie viel Procent nahm dieser, wenn die Zinseszinsen mit in Anschlag gebracht werden?

Antw. Etwas über 10 Procent.

18) Wenn das Grundcapital a nach n Jahren auf A Thlr. anwachsen soll: wie hoch muß der Zinsfuß seyn?

Antw. $\log p = \frac{\log A - \log a}{n}$ (p bezeichnet den Zinsfuß.)

19) Jemand hat nach 6 Jahren eine Summe von 3750 Thlr. zu bezahlen. Wie viel kann er für diese Summe baar bezahlen, wenn 4 Procente discontirt, und die Zinseszinsen dabei in Anschlag gebracht werden?

Antw. 2963 Thlr. 16 Gr. ungefähr.

20) Was ist der baare Werth eines Capitals a, welches nach n Jahren fällig ist, zum Zinsfuße p gerechnet?

Antw. $\frac{a}{p^n}$

21) Wie hoch ist ein Torfstich, der erst nach vollendetem zwanzigsten Jahre 500 Thlr. Nutzen abwirft, zu bezahlen, daß das darauf angelegte Capital 4 Procent trage?

Antw. Mit etwas über 228 Thlr.

22) In einer Stadt zählt man 20000 Seelen, und man weiß, daß sich die Volksmenge regelmäßig jährlich um $\frac{3}{100}$ vermehrt habe: wie groß war daselbst die Volksmenge vor zehen Jahren?

Antw. 14882.

23) Ein Forstrevier wird zu 30000 Klaftern abgeschätzt, und man weiß, daß es sich jährlich um 2 Procent vermehrt hat: wie groß ist sein Gehalt vor 10 Jahren gewesen?

Antw. 24610 Klafter.

24) Zu einem ausgebotenen Gute melden sich drei Kauflustige. Der erste bietet 30000 Thlr. an baarem Gelde; der zweite erbietet sich, 33500 Thlr. nach drei Jahren ohne Zinsen zu bezahlen, der dritte endlich zu 40000 Thlr. nach 7 Jahren, ebenfalls ohne Zinsen. Welches von diesen dreien Geboten ist am größten, wenn die Zinsen zu 5 Procent gerechnet, und die Zinseszinsen dabei in Anschlag gebracht werden? Und um wie viel übertrifft es die beiden andern an baarem Werthe?

Antw. Das erste ist am größten, und es übertrifft das zweite um 1061, und das dritte um 1573 Thlr. beinahe.

25) In wie vielen Jahren ist die Volksmenge eines Ortes zehnmal so groß geworden, wenn die jährliche Vermehrung 3 Köpfe auf hundert beträgt?

Antw. In 78 Jahren ungefähr.

26) Ein wohl angelegtes Capital von 800 Thlr. ist in einem Zeitraume von 6 Jahren auf 3600 Thlr. angewachsen: zu wie vielen Procenten ist dieses Capital benutzt worden?

Antw. Zu $28\frac{1}{2}$ beinahe.

27) Ein Capital a wird zum Zinsfuße p angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres mit seinen getragenen Zinsen vermehrt, zugleich aber jährlich immer um dieselbe Summe b vermehrt oder vermindert. Wie groß wird nun dieses Capital nach n Jahren seyn?

Antw. Es ist $= ap^n \pm \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$; wo das obere Zei-

chen für das um b vermehrte, und das untere für das um b verminderte Capital gilt.

28) Ein Capital von 6000 Thlr. stehet auf Zinseszinsen zu 5 Procent, und wird am Ende eines jeden Jahres, außerdem daß die Zinsen zum Capital geschlagen werden, auch noch um 500 Thlr. vermehrt. Wie viel wird dadurch das Capital in zehn Jahren werden?

Antw. 16062 Thlr. 7 Gr. ungefähr.

29) Was wird ein Capital von 3740 Thlr. nach acht Jahren, wenn am Ende eines jeden Jahres 450 Thlr. zugelegt werden, die Zinsen zu 4 Procent gerechnet?

Antw. 9264 Thlr. 20 Gr. ungefähr.

30) Eine Schuld von 15467 Thlr. ist zu 5 Procent verzinset; es wird darauf am Ende eines jeden Jahres 600 Thlr. abgetragen. Wie viel beträgt der Rest der Schuld nach Verlauf von zehn Jahren?

Antw. 17647 Thlr. ungefähr.

31) Von einem Capitale von 5000 Thlr., das zu 5 Procent stehet, nimmt man jährlich 400 Thlr. hinweg; wie groß wird der Rest nach zehn Jahren seyn?

Antw. 3113 Thlr. ungefähr.

32) Jemand ist verpflichtet, sieben Jahre hintereinander mit dem Anfange eines jeden Jahres 4000 Thlr. zu bezahlen, ist aber mit der Zahlung rückständig geblieben: wie viel ist er am Anfange des siebenten Jahres schuldig, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

Antw. 31593 Thlr. ungefähr.

33) Jemand giebt ein Capital von 30000 Thlr. zu 4 Procent auf Zinsen, nimmt am Ende eines jeden Jahres von den erhaltenen Zinsen 800 Thlr. zu seinem Unterhalte

hinweg, und schlägt den Rest zum Capitale; wie groß wird das Capital nach 15 Jahren seyn?

Antw. 38009 Thlr. 10 Gr. beinahe.

34) Jemand hat sein ganzes Vermögen von 100000 Thlr. zu 5 Procent auf Zinsen gegeben, ist aber nicht im Stande, mit den Zinsen dieses Capitals seinen Aufwand zu bestreiten, weil er dazu jährlich 6000 Thlr. braucht. Er ist daher genöthigt, am Ende eines jeden Jahres so viel vom Capitale hinweg zu nehmen, daß dieses sammt den erhaltenen Zinsen 6000 Thlr. beträgt. Nach wie vielen Jahren wird dieser Mann, wenn er so fortfährt, ein Bettler werden?

Antw. Nach 36 bis 37 Jahren.

35) Ein Capital a zum Zinsfuße p ausgeliehen worden: in welcher Zeit wird daraus die Summe a' werden, wenn das, durch die Zinsen und Zinseszinsen aufschwellende Capital jährlich um die Summe b vermehrt oder vermindert wird?

Antw. $n = \frac{\log[(p-1)a' \pm b] - \log[(p-1)a \pm b]}{\log p}$

(n die Anzahl der Jahre.) Das obere Zeichen von $\pm$ gilt für die Zulage, das untere für die Wegnahme des b.

36) Wenn nun in der vorigen Aufgabe jährlich b hinweg genommen wird, und b größer ist als die Zinsen des Capitals a: nach wie vielen Jahren wird alsdann das Capital aufgezehrt seyn?

Antw. $n = \frac{\log b - \log[b-(p-1)a]}{\log p}$ giebt die Anzahl der erforderlichen Jahre.

37) Wie groß ist der baare Werth w einer Jahrrente r, welche man n Jahre zu genießen hat, zum Zinsfuße p gerechnet?

Antw. $w = \frac{(p^n - 1)r}{(p-1)p^n}$.

38) Jemand, der eine Jahrrente von 500 Thlr. auf sechs Jahre zu genießen hat, will solche verkaufen; wie viel kann man ihm für diese Rente an baarem Gelde geben, wenn die Zinsen zu $3\frac{1}{2}$ Procent gerechnet werden?

Antw. 2664 Thlr. 7 Gr. ungefähr.

39) Wie viel beträgt der baare Werth einer auf acht Jahre angewiesenen jährlichen Rente von 350 Thlr., die Zinsen zu 4 Procent gerechnet?

Antw. Etwas über 2356 Thlr. 11 Gr.

40) Wie viel kann man für eine Jahrrente von 400 Thlr. geben, die zwölf Jahre zu beziehen ist, wenn die Zinsen zu 3 Procent gerechnet werden?

Antw. Etwas über 3981 Thlr. 14 Gr.

41) Wenn eine durch n Jahre zu beziehende Jahrrente r den baaren Werth w hat: wie groß muß sie seyn?

Antw. $r = \frac{(p-1)p^n w}{p^n - 1}$.

42) Eine gegenwärtige Schuld von 1200 Thlr. soll in sieben jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Wie hoch muß man diese Terminalzahlungen ansetzen, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

Antw. Zu 200 Thlr. beinahe.

43) Wie groß muß die Jahrrente seyn, wenn der Genuß derselben auf 13 Jahre einem baaren Capitale von 20000 Thlr. gleich geachtet werden soll, die Zinsen zu 4 Procent gerechnet?

Antw. 2003 Thlr. beinahe.

44) Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft 20000 Thlr. aufgenommen, und ihr dafür einen Wald verpfändet, welcher jährlich 1500 Thlr. reinen Nutzen abwirft. Wie lange kann die Herrschaft diesen Wald für das hingegebene Capital benutzen, wenn die Zinsen zu 5 Prozent gerechnet werden?

Antw. 22 Jahre beinahe.

45) Jemand will für 34580 Thlr. eine Jahrrente von 2000 Thlr. erwerben; auf wie lange kann man ihm diese Rente bewilligen, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

Antw. Auf 30 Jahre ungefähr.

46) Wie lange hat eine Jahrrente zu laufen, wenn sie einer baaren Summe w gleich geachtet werden soll, den Zinsfuß p angenommen?

Antw. $n = \frac{\log r - \log [r - (p-1)w]}{\log p}$.

47) Es wird eine Jahrrente r' auf den gegebenen Zeitraum non n' Jahren gesucht, welche an baarem Werthe einer andern Jahrrente r auf n Jahre gleich ist, wenn beide zum Zinsfuße p gerechnet werden: wie groß muß diese Rente seyn?

Antw. $r' = \frac{(p^n - 1)p^{n'-n}}{p^{n'} - 1} r$.

48) Wie groß muß aber die gesuchte Jahrrente r' alsdann seyn, wenn sie auf m Jahre aufgeschoben, d. h. wenn sie nach m Jahren zum erstenmal und dann n' Jahre hindurch, bezahlt werden soll?

Antw. $r' = \frac{(p^n - 1)p^{n'-n+m}}{p^{n'} - 1} r$.

49) Wie groß ist der baare Werth einer Jahrrente r, welche in einem geometrischen Verhältnisse steigt, dessen

Exponent e ist, wenn sie durch n Jahre fortdauert, und zum Zinsfuße p gerechnet wird?

Antw. $\frac{r(e^n - p^n)}{(e-p)p^n}$, oder $\frac{r\left(\frac{e^n}{p^n} - 1\right)}{e-p}$. Die letztere Form ist zur Berechnung durch Logarithmen bequemer.

50) Wie groß ist der baare Werth einer Jahrrente auf n Jahre, wenn die Hebungen nach der arithmetischen Progression r, $2r$, $3r$, $4r$, u. s. w., geschehen sollen, so daß am Ende des ersten Jahres r, am Ende des zweiten Jahres $2r$, u. s. w., ausgezahlt wird, zum Zinsfuße p gerechnet?

Antw. Der baare Werth einer Jahrrente r auf n Jahre, welche sich immer gleich bleibt, sey $= w$, so ist der baare Werth der in der angegebenen arithmetischen Progression fortgehenden Rente $= \frac{1}{p-1}\left(pw - \frac{nr}{p^n}\right)$.

....

Wer über den Gegenstand dieses Capitels vollständige Belehrung wünscht, findet sie in Florencourt's Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, in Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, und in Christiani's Anfangsgründe der Staatsrechenkunst. Unter diesen dreien Werken dürfte leicht das von Tetens das vollständigste seyn. Für Geschäftsmänner, welche nicht so tief eindringen wollen, hat Langsdorf ein kleines Werkchen herausgegeben, unter dem Titel: Arithmetische Abhandlungen über juristische, staats- und forstwissenschaftliche Fragen, Mortalität, Bevölkerung rc.

Für den Lehrer folgende Bemerkung. Die letzte Aufgabe läßt sich noch sehr leicht mit Hülfe der geometrischen Progressionen auflösen, und mehr gehört nicht hieher. Sie ist aber nur ein einzelner Fall von einer weit allgemeinern. Es sey $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ rc. die Rentenhebung nach dem unbestimmten $x$ten Jahre; so ist der baare Werth dieser einzelnen Hebung $=p^{-x}(A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ rc.), und folglich $Sp^{-x}(A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ rc.), der baare Werth der Rente, wo S das Summenzeichen ist. Summationen von dieser Art sind aber immer ausführbar. (M. s. Traité du calcul des différences et des séries, par Lacroix p. 85. §. 953 der zweiten Auflage.) Für die obige Aufgabe ist $B=r$, und $A, C, D,$ rc. $=0$.

XXII. Aufgaben für die Permutationen, Combinationen und Variationen, wie auch für die Berechnung des Wahrscheinlichen.

1) Wie oft können acht neben einander stehende Personen ihre Plätze wechseln, das heißt, so verändern, daß sie jedesmal eine andere Ordnung beobachten?

Antw. 40320 mal.

2) Wie oft können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

Antw. 620448401733239439360000 mal. Alle Menschen auf dem ganzen Erdboden würden, nach einer ungefähren Berechnung, nicht in tausend Millionen Jahren alle Versetzungen der 24 Buchstaben schreiben können, wenn auch

jeder täglich 40 Seiten schriebe, deren jede 40 verschiedene Versetzungen der Buchstaben enthält.

3) Wie viele Complexionen giebt es unter den sämmtlichen Versetzungen von $abcdefg$, welche sich mit einem von den Buchstaben a, b, c, d, e, f, g anfangen.
Antw. 720.

4) Wie viele giebt es darunter, welche sich mit ab anfangen? Wie viele mit abc? Wie viele mit $abcd$?
Antw. 120 mit ab, 24 mit abc und 6 mit $abcd$.

5) Wie viele giebt es darunter, worin die Buchstaben a, b, c, d zusammen bleiben, und zwar in der Ordnung, wie sie hier gesetzt worden?
Antw. 24.

6) Wie viele hingegen giebt es darunter, worin die Buchstaben a, b, c, d zusammen bleiben, wenn auf die Ordnung dieser Buchstaben nicht gesehen wird?
Antw. 576.

7) Wie viele Complexionen giebt es unter den sämmtlichen Versetzungen $a^3b^5c^4$, welche sich mit c^3 anfangen?
Antw. 504.

8) Wie viele, welche sich mit a^2b^2c anfangen?
Antw. 140.

9) Wie viele giebt es darunter, wo a eine bestimmte Stelle, etwa die vierte, einnimmt?
Antw. 6930.

10) Wie viel beträgt die Summe der Ziffern in allen Versetzungen der Zifferncomplexion 12234 zusammen genommen?
Antw. 720.

11) Wie viel beträgt die Summe einer jeden Vertikalkolumne, wenn die Complexionen gerade unter einander geschrieben werden?

Antw. 144.

12) Wie viel beträgt die Summe einer jeden Vertikalkolumne, wenn alle Versetzungen der Ziffernkomplexion 2557789 unter einander gesetzt werden?

Antw. 7740.

13) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen und Quinten siud in 90 Nummern enthalten?

Antw. 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen und 43949268 Quinten.

14) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen und Quinten sind in 60 Nummern enthalten?

Antw. 1770 Amben, 34220 Ternen, 487635 Quaternen und 5461512 Quinten.

15) Aus einem Piketspiele von 32 gemischten Karten soll man blindlings und ohne zu wählen 15 Blätter herausziehen. Auf wie viel gleich mögliche Arten können die gezogenen Karten zusammen gesetzt sein?

Antw. Auf 565722720 Arten.

16) Das Produkt $abcd$ läßt sich auf drei Arten in kleinere Produkte jedes von zwei Faktoren zerfällen, nämlich in $ab \times cd$, $ac \times bd$, $ad \times bc$; das Produkt $abcdef$ läßt 15 solche Zerfällungen zu, nämlich $ab \times cd \times ef$, $ab \times ce \times df$, $ab \times cf \times de$, u. s. w. Auf wie viele Arten wird sich nun das Produkt $abcdefg$ 2c., wenn dasselbe $2n$ Faktoren a, b, c, d, e, f, g, 2c., enthält, in solche Produkte von zwei Faktoren zerfällen lassen?

Antw. Auf $\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(3n-1)2n}{(1\cdot 2)^n}$ Arten.

17) Auf wie viele Arten wird sich das, aus $3n$ Faktoren a, b, c, d, e, f, g, 2c. zusammengesetzte Produkt $abcdefg$ 2c., in Produkte jedes von drei dieser Faktoren zerfällen lassen?

Antw. Auf $\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(3n-1)3n}{(1\cdot 2\cdot 3)^n}$ Arten.

18) Auf wie viele Arten wird sich das, aus mn Faktoren a, b, c, d, e, f, g, 2c. zusammengesetzte Produkt $abcdefg$ 2c., in Produkte jedes von m Faktoren zerfällen lassen?

Antw. Auf $\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(mn-1)mn}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots m)^n}$ Arten.

19) Jede ganze Zal N ist entweder selbst eine Primzahl, oder sie ist ein Produkt von gleichen und verschiedenen Primzahlen. Bezeichnen daher a, b, c, 2c., Primzahlen, so kann im Allgemeinen $N=a^m b^n c^p$ 2c. gesetzt werden, wenn man sich nur unter m, n, p, 2c., alle mögliche ganze Zahlen denkt, die Null mit eingeschlossen. Wie lassen sich nun alle mögliche Zahlen finden, durch welche die Zahl N theilbar ist? Und wie viele Theiler wird sie überhaupt haben?

Antw. Es sey, der Kürze wegen, $1+a+a^2+\cdots\cdots+a^m=A$, $1+b+b^2+\cdots\cdots+b^n=B$, $1+c+c^2+\cdots\cdots+c^n=C$, 2c., so geben die Glieder des Produkts $ABCD$ 2c. die sämmtlichen Theiler der Zahl N, und die Anzahl derselben ist $=(m+1)(n+1)(p+1)$ 2c. Da z. B. $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1$, so giebt das Produkt $4\cdot 3\cdot 2$ die Anzahl der Theiler von 360, und die Glieder des Produkts $(1+2+4+8)$ $(1+3+9)$ $(1+5)$ geben diese Thei-

ler selbst, nämlich: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

20) Wie lassen sich Zahlen finden, welche gerade die gegebene Anzahl n Theiler haben, weder mehr noch weniger?

Antw. Es seyen a, b, c, rc., beliebige Primzahlen. Ist nun n eine Primzahl, so ist a^{n-1} eine solche Zahl, wie sie verlangt wird. Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so zerlege man sie in ihre Faktoren m', m'', m''', rc., gleichviel ob einfache oder nicht, und es wird alsdann $a^{m'-1}\, b^{m''-1}\, c^{m'''-1}$ rc. eine solche Zahl seyn, wie man sie sucht.

21) Ein vollständiges Polynom von der Nten Dimension für n Größen x, y, z, rc., heiße dasjenige, welches alle Combinationen dieser n Größen von der 0ten bis zur Nten Classe, diese mit eingeschlossen, enthält. Also z. B. ein Polynom von der vierten Dimension für zwei Größen, ein solches: $a+bx+b'y+cx^2+c'xy+c''y^2+dx^3+d'x^2y+d''xy^2+d'''y^3+ex^4+e'x^3y+e''x^2y^2+e'''xy^3+e''''y^4$. Aus wie vielen Gliedern bestehet nun ein vollständiges Polynom von der Nten Dimension für n Größen?

Antw. Aus $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$ Gliedern.

22) Wie viele von diesen Gliedern bleiben übrig, wenn alle diejenigen, welche durch x^p theilbar sind, davon ausgeschlossen werden?

Antw. $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$

$$-\frac{(N-p+1)(N-p+2)(N-p+3)\cdots(N-p+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$$

23) Wie viele bleiben übrig, wenn alle diejenigen, welche durch x^p und y^q theilbar sind, davon ausgeschlossen werden?

Antw. $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n}$

$$-\frac{(N-p+1)(N-p+2)(N-p+3)\cdots(N-p+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n}$$

$$-\frac{(N-q+1)(N-q+2)(N-q+3)\cdots(N-q+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n}$$

$$+\frac{(N-p-q+1)(N-p-q+2)\cdots(N-p-q+n)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots\cdots n}.$$

24) Es wird angenommen, daß unter n überhaupt möglichen Fällen, wie eine Begebenheit sich ereignen kann, es m Fälle gebe, welche irgend einer darauf gegründeten Hoffnung oder Erwartung günstig sind, also $n-m$ Fälle, wo ein ungünstiger Erfolg eintritt: welche Wahrscheinlichkeit ist alsdann für einen günstigen, und welche für einen ungünstigen Fall vorhanden?

Antw. $\frac{m}{n}$ für den günstigen, und $\frac{n-m}{n}$ für den ungünstigen Fall.

Wie sind diese Ausdrücke zu deuten, wenn $m=0$ ist? Und wie, wenn $m=n$ ist?

25) In der ehemaligen Berliner Zahlenlotterie wurden von 90 Nummern, welche man in ein Rad legte, und vermittelst der Umdrehung durch einander mischte, fünf als Treffer herausgezogen. Wenn nun jemand 12 aus diesen 90 Nummern nach Willkühr wählte, und alle darin enthaltenen Amben, Ternen, Quaternen und Quinten besetzte: wie groß war für ihn die Wahrscheinlichkeit, eine Ambe, Terne, Quaterne oder Quinte zu gewinnen?

Antw. Für die Ambe war seine Wahrscheinlichkeit $= \frac{44}{267}$, für die Terne $= \frac{5}{267}$, für die Quaterne $= \frac{5}{5162}$, und für die Quinte $= \frac{2}{110983}$.

26) Jemand wollte in der ehemaligen Berliner Zahlenlotterie von 90 Nummern so viele Zettel, jeden zu 5 Num-

mern, spielen, daß er die fünf Treffer gewiß auf einem von seinen Zetteln habe. Wie viele Zettel mußte er in allen nehmen? Wie viele Zettel waren unter diesen, welche nur vier Treffer enthielten? Wie viele von zwei und von drei Treffern? Wie viele, auf welchen nur ein einziger Treffer war? und wie viele Zettel endlich, auf welchen sich gar kein Treffer befand?

Antw. Die Anzahl der Zettel, welche er spielen mußte, war 43949268; darunter befanden sich 425 mit Quaternen, 35700 mit Ternen, 987700 mit Amben, 10123925 mit Auszügen, und endlich 32801517 mit Nieten.

27) Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit, aus 13 verschiedenen in einem Glücksrade befindlichen Nummern sechs vorher bestimmte Nummern zu ziehen, zur Wahrscheinlichkeit, aus einem Piketspiele von 32 Karten acht vorher bestimmte Karten zu ziehen, unter der Voraussetzung, daß sowohl die Nummern als die Karten gehörig gemischt seyen, und das Herausziehen blindlings geschehe? Und im Falle dies zwei Spiele wären, bei welchen die Gewinnste, wenn die bestimmten Nummern oder Karten herausgezogen werden, gleich groß sind: wie müssen sich die Einsätze verhalten, wenn, in Rücksicht auf die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes, beide Spiele für gleich geachtet werden sollen?

Antw. Die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes beim ersten Spiele verhält sich zu der beim zweiten Spiele wie 11 zu 67425, und die Einsätze bei diesen beiden Spielen ebenfalls wie 11 zu 67425.

28) Auf wie viele Arten lassen sich 40 verschiedene Kugeln in zwei Haufen abtheilen, daß der eine 33 und der andere 7 Kugeln enthalte?

Antw. Auf 18643560 Arten.

29) Auf wie viele Arten können 21 verschiedene Kugeln in drei Haufen von 3, 7 und 11 Kugeln abgetheilt werden?
Antw. Auf 42325920 Arten.

30) Auf wie viele Arten lassen sich 19 verschiedene Kugeln in vier Haufen von 2, 4, 5 und 8 Kugeln abtheilen?
Antw. Auf 523783260 Arten.

31) Auf wie viele verschiedene Arten können aus einem Piketspiele von 32 Karten erst 12, und hierauf von den noch übrigen 20 Blättern noch 9 dazu genommen werden? Oder, welches eben das sagt, auf wie viele Arten können 32 Karten in drei Theile eingetheilt werden, daß der erste aus 12, der zweite aus 9 und der dritte aus 11 Blättern bestehe?
Antw. Auf 37924165406400 Arten.

32) Im Piketspiele bekommt jeder von den beiden Spielenden 12 Karten, und die übrigen 8 werden als Kaufkarten zurückgelegt: wie viele verschiedene Spiele sind nun bei der Austheilung der Karten möglich?
Antw. 28443124054800.

33) Auf wie viele Arten können die 52 Kartenblätter des ganzen Spiels unter die vier Whistspieler ausgetheilt werden? Oder, welches eben das sagt: auf wie viele Arten können diese 52 Karten in vier gleiche Theile, von welchen jeder 13 Karten enthält, eingetheilt werden?
Antw. Auf 53644737765488792839237440000 Arten.

34) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 30, in einer Lotterie von der Einrichtung der ehemaligen Berliner, besetzten Nummern gerade eine, und nicht mehr als diese eine herauskommen werde?
Antw. $\frac{28025}{84194}$ oder ungefähr $\frac{1}{3}$.

35) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen 30 besetzten Nummern gerade zwei, weder mehr noch weniger, herauskommen werden?

Antw. $\frac{171100}{505164}$ oder etwas über $\frac{1}{3}$.

36) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß gerade 3 von diesen 30 Nummern herauskommen werden?

Antw. $\frac{82600}{505164}$ oder ungefähr $\frac{8}{49}$.

37) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle fünf gezogene Nummern unter den 30 besetzt seyn werden?

Antw. $\frac{273}{84194}$ oder ungefähr $\frac{1}{308}$.

38) Es sollen aus einem wohl gemischten Piketspiele 9 Karten blindlings herausgezogen werden: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich darunter fünf von einer bestimmten Farbe, etwa von Treff, befinden werden?

Antw. $\frac{12397}{584350}$ oder ungefähr $\frac{1}{47}$.

39) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von fünf, in einer Lotterie von der Einrichtung der ehemaligen Berliner, besetzten Nummern gerade drei, weder mehr noch weniger, herauskommen werden?

Antw. $\frac{2975}{3662439}$ oder ungefähr $\frac{1}{1231}$.

40) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich zwei Begebenheiten zugleich ereignen werden, deren eine die Wahrscheinlichkeit $\frac{m}{n}$, die andere die Wahrscheinlichkeit $\frac{m'}{n'}$ für sich hat.

Antw. $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$. Warum?

41) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich drei Begebenheiten zugleich ereignen werden, wenn sie einzeln die Wahrscheinlichkeiten $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ für sich haben?

Antw. $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} \cdot \frac{m''}{n''} = \frac{mm'm''}{nn'n''}$.

42) In einem Kasten befinden sich 24 Kugeln, nämlich 6 weiße, 8 schwarze und 10 rothe; es sollen zuerst 7 Kugeln, und hierauf von den alsdann noch übrigen 17 wieder drei Kugeln blindlings herausgezogen werden. Ich setze darauf, daß die sieben Kugeln alle roth, und die drei Kugeln alle weiß seyn werden. Wie groß ist meine Wahrscheinlichkeit zu gewinnen?

Antw. $\frac{5}{490314}$, und daher nur wenig Hoffnung.

43) Wie viele verschiedene Würfe können mit zwei, drei, vier, und im Allgemeinen mit n-Würfeln gemacht werden?

Antw. Mit zwei Würfeln 36, mit drei Würfeln 216, mit vier Würfeln 1296, und überhaupt mit n Würfeln 6^n Würfe.

44) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit vier Würfeln vier gleiche Augen zu werfen?

Antw. $\frac{1}{216}$.

45) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln einen Pasch, d. h. zwei gleiche Augen und nicht mehr zu werfen?

Antw. $\frac{5}{12}$.

46) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit vier Würfeln gerade zwei gleiche Augen, und nicht mehr zu werfen, aber so, daß die übrigen Würfel ungleiche Augen haben? Wie groß ist sie unter der nämlichen Bedingung für fünf, sechs und sieben Würfel? Wie groß endlich für acht Würfel?

Antw. Für vier Würfel ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{5}{9}$; für fünf Würfel $= \frac{25}{54}$; für sechs Würfel $= \frac{25}{108}$;

für sieben Würfel $= \frac{85}{648}$; und für acht Würfel $= 0$, oder der Fall ist unmöglich.

47) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit vier Würfeln eine Terne, d. h. drei gleiche Augen und nicht mehr zu werfen?

Antw. $\frac{5}{54}$.

48) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit fünf Würfeln gerade drei gleiche Augen und nicht mehr zu werfen, aber so, daß die übrigen Würfel ungleiche Augen haben? Wie groß ist sie unter der nämlichen Bedingung für sechs, sieben und acht Würfel? Wie groß endlich für neun Würfel?

Antw. Für fünf Würfel ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{25}{162}$; für sechs Würfel ebenfalls $= \frac{25}{162}$; für sieben Würfel $= \frac{175}{1944}$; für acht Würfel $= \frac{35}{1458}$; für neun Würfel $= 0$, d. h. der Fall ist unmöglich.

49) Ist es wahrscheinlicher, mit drei Würfeln zwei Sechsen zu werfen, oder aus einem gemischten Piketspiele drei Karten von einer Farbe, blindlings und ohne zu wählen, heraus zu ziehen?

Antw. Das erste ist wahrscheinlicher, und zwar verhält sich die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles zu der des zweiten wie 775 zu 504.

50) Es werden mir zwei Spiele angeboten, um darauf zu setzen. Bei dem ersten sollen mit zwölf Würfeln genau acht gleiche Augen und nicht mehr geworfen werden, aber zugleich so, daß die übrigen ungleiche Augen haben. Bei dem andern soll ich aus einem ganzen Spiele von 52 Karten fünf Blätter von einer Farbe heraus ziehen. Welchem Spiele soll ich, wenn ich Lust zum Setzen habe, den Vorzug geben? Und wie verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten des Gewinnes bei diesen Spielen?

Antw. Das zweite Spiel ist vortheilhafter als das erste, und zwar verhält sich die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens bei demselben zu der beim ersten Spiele wie 1259712 zu 104125, oder ungefähr wie $12\frac{1}{10}$ zu 1.

....

Etwas von Wahrscheinlichkeits-Rechnungen, vorzüglich aber in Hinsicht auf Mortalität, kommt schon in den oben genannten Werken von Christiani, Florencourt und Tetens vor. Ein eigenes Werk darüber ist folgendes, „Die Rechnung des Wahrscheinlichen, von de Bicquilley: aus dem Französischen von Rüdiger (Leipzig 1788);" sehr deutlich geschrieben, und setzt überdies keine tiefe Kenntnisse voraus.

XXIII. Vermischte Aufgaben.

1) Aus einem Spiele von 32 Karten werden drei Karten gezogen; auf jede derselben werden so viele Karten gelegt, als erforderlich sind, damit die Anzahl derselben mit der Zahl der Augen der Karte, worauf man sie legt, 15 ausmache; es bleiben aber alsdann noch 8 Karten übrig: wie viel beträgt die Summe der Augen auf den drei ersten Karten?

Antw. 24.

2) Aus einem Spiele von a Karten werden n Karten gezogen; auf jede derselben werden so viele Karten gelegt, daß ihre Anzahl und die Zahl der Augen jeder unten liegenden Karte zusammen die Summe s ausmachen. Es bleiben aber alsdann noch r Karten übrig: wie viel beträgt die Summe der Augen auf den n ersten Karten?

Antw. $ns + n + r - a$.

3) Jemand kauft ein Stück Tuch und bezahlt 7 Thlr. für jede 5 Ellen; verkauft es hierauf wieder, jede 11 Ellen für 16 Thlr. und gewinnt an diesem Handel 24 Thlr. Wie viele Ellen hält das Stück?

Antw. 440.

4) Zwei Reisende treten ihre Reise an, A mit 100, B mit 48 Thlr. Unterweges werden sie von Räubern überfallen, welche ihnen einen Theil ihres Geldes abnehmen, wobei A zwar doppelt so viel als B verliert, aber doch dreimal so viel übrig behält als dieser. Wie viel ist nun jedem genommen worden?

Antw. Dem A 88, und dem B 44 Thlr.

5) Ein Buchbinder verkauft mir zwei gebundene Bücher Papier, das eine, welches 48 Bogen enthält, für 14, das andere, welches 78 Bogen enthält, für 19 Gr.; Band und Papier sind bei beiden gleich: wie hoch wurde der Band gerechnet?

Antw. Zu 6 Gr.

6) Eine Summe von 156 Thlr. soll unter 16 arme Knaben nach der Stufenfolge ihres Alters vertheilt werden, und zwar so, daß jeder ältere durchgehends gleich viel mehr erhalte als der zunächst jüngere. Wenn nun der jüngste bei dieser Vertheilung 6 Thlr. erhält, wie viel bekommt jeder folgende mehr? Und wie viel bekommt der älteste?

Antw. $\frac{1}{2}$ Thlr. und $13\frac{1}{2}$ Thlr.

7) Eine Schuld von 2363 Thlr. soll in 34 Terminen abgetragen werden, und zwar so, daß in jedem Termine 3 Thlr. mehr als im nächst vorhergehenden bezahlt wird. Wie viel muß man den ersten Termin abtragen?

Antw. 20 Thlr.

8) Ein Wasserbehälter, der durch zwei Röhren in einer Zeit von 12 Minuten gefüllt wird, könnte durch die eine dieser Röhren allein in 20 Minuten gefüllt werden; in welcher Zeit könnte es durch die andere Röhre geschehen?

Antw. In 30 Minuten.

9) Jemand kauft für 18 Gr. eine gewisse Anzahl Aepfel und Birnen, bezahlt für 4 Aepfel einen Groschen und für 5 Birnen ebenfalls einen Groschen; er läßt hierauf seinem Nachbarn die Hälfte der Aepfel und den dritten Theil der Birnen ab, und erhält dafür 8 Gr., welches sie ihm selbst kosteten. Wie viele Aepfel und Birnen hatte er gekauft?

Antw. 48 Aepfel und 30 Birnen.

10) Es wird eine Zahl gesucht, die so beschaffen ist, daß, wenn man sie zu 15, zu 27 und zu 45 addirt, drei Zahlen herauskommen, die in geometrischer Proportion stehen. Diese Zahl ist?

Antw. 9.

11) Ich habe eine arithmetische und eine geometrische Progression, jede von drei Gliedern, und die Summe aller sechs Glieder beträgt 96. Das erste Glied der arithmetischen ist in dem ersten Gliede der geometrischen Progression zweimal enthalten; das zweite Glied der arithmetischen ist in dem zweiten Gliede der geometrischen Progression dreimal, und das dritte Glied der arithmetischen in dem dritten Gliede der geometrischen Progression sechsmal enthalten. Welche Progressionen sind es?

Antw. 3, 6, 9, und 6, 18, 54.

12) A, B, C wollen ein Gemälde kaufen, aber keiner hat Geld genug dazu. A erbittet sich von B und C die Hälfte ihres Geldes, um es kaufen zu können; B hingegen

bittet A und C nur um den dritten Theil ihres Geldes, weil er es alsdann zu kaufen im Stande wäre. Hierauf sagt C: leihet mir den vierten Theil eures Geldes, so kann ich es kaufen. Wie viel Geld hat demnach jeder, und wie viel kostet das Gemälde, wenn man weiß, daß diese drei Leute nur ganze Thalerstücke bei sich haben.

Antw. Das Gemälde kostet entweder 17 Thlr., und alsdann hat A 5, B 11 und C 13 Thlr.; oder das Gemälde kostet 34 Thlr., und alsdann hat A 10, B 22 und C 26 Thlr.; oder u. s. w.

13) Fünf Freunde, A, B, C, D, E, verzehrten in einem Gasthofe zusammen eine gewisse Summe, deren Bezahlung einem von ihnen übertragen werden soll, wozu aber, wie sich bei der Zählung ihrer Thalerstücke findet, (denn kleinere Münze haben sie alle nicht,) keiner Geld genug hat. Sollte einer allein bezahlen, so müßten die übrigen noch einen Theil ihres Geldes zuschießen, und zwar müßte A den vierten, B den fünften, C den sechsten, D den siebenten und E den achten Theil von dem Gelde der übrigen bekommen. Wie viel haben sie verzehrt? Und wie viel hat jeder von ihnen?

Antw. Verzehrt wenigstens 879 Thlr., und alsdann hat A 319, B 459, C 543, D 599 und E 639 Thlr., oder u. s. w.

14) Einige einander fremde Personen wollten in Gesellschaft auf gemeinschaftliche Kosten eine Reise machen, und mietheten zu diesem Behufe einen Wagen für 342 Thlr. Unterweges liefen drei davon, und nun mußte jeder der übrigen 19 Thlr. mehr bezahlen, als sonst auf seinen Theil gekommen wäre. Wie viele Personen waren es anfangs?

Antw. 9.

15) Eine Goldstange wurde mit Verlust für 420 Thlr.

verkauft, hätte man sie für 570 Thlr. verkauft, so wäre der Gewinn gerade viermal so groß gewesen als jetzt der Verlust ist. Wie viel hatte man dafür gegeben?

Antw. 450 Thlr.

16) Acht Pferde haben in sieben Wochen eine Wiese von 400 Quadratruthen so abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches im Anfange bereits da stand, als auch jenes abfraßen, welches während dieser Zeit darauf gewachsen war. Bei gleichem Futter haben neun Pferde in acht Wochen eine Wiese von 500 Quadratruthen abgeweidet. Wie viele Pferde könnten auf diese Art 12 Wochen lang auf einer Wiese von 600 Quadratruthen weiden?

Antw. 8.

17) Ein sterbender Ehemann hinterläßt eine schwangere Frau und ein reines Vermögen von 9000 Thlr. Er verordnet in seinem Testamente, daß, im Fall seine Frau einen Sohn zur Welt bringt, der Sohn dreimal so viel erhalten solle als seine Mutter; gebäre sie aber eine Tochter, so soll diese nur halb so viel bekommen als ihre Mutter. Kurze Zeit nach des Mannes Tode kommt die Frau mit Zwillingen nieder, nämlich mit einem Sohne und einer Tochter. Wie muß nun das Vermögen getheilt werden?

Antw. Die Mutter erhält 2000, der Sohn 6000 und die Tochter 1000 Thlr.

18) Ein Reisender gehet von einem gewissen Orte ab, und macht den ersten Tag eine Meile, den zweiten zwei, den dritten drei, den vierten vier Meilen, und so fort in Progression. Fünf Tage nachher gehet ein anderer Reisender von demselben Orte ab, nimmt denselben Weg und macht täglich 12 Meilen. An welchem Tage nach der Abreise des ersten werden beide Reisende sich begegnen?

27) In einer Salzauflösung ist das Gewicht des süßen Wassers $= a$, das Gewicht des Salzes $= b$, also ihr Gehalt $= \frac{b}{a+b}$. Wie viel Wasser muß noch zugegossen werden, wenn der Gehalt derselben $= g$ seyn soll?

Antw. $\frac{b}{g} - (a+b)$. Die Einheit des Gewichts die nämliche als die, worin a und b gegeben sind.

Wie ist dieser Ausdruck zu deuten, wenn $\frac{b}{g} < a+b$, also $\frac{b}{a+b} < g$ ist?

28) Irgend ein Stoff A ist p mal so schwer als Wasser; ein anderer Stoff B nur p' mal so schwer als Wasser: wie viel muß nun von dem zweiten Stoffe mit einer Quantität des ersten Stoffes, deren Gewicht $= g$ ist, verbunden werden, wenn der so verbundene Körper im Durchschnitt p'' mal so schwer als Wasser seyn soll, vorausgesetzt, daß p'' zwischen p und p' fällt?

Antw. $\frac{gp'(p-p'')}{p(p''-p')}$. Die Einheit die nämliche als die, worin g gegeben ist.

29) Das Blei ist 11,324 mal so schwer als Wasser, das leichte Korkholz aber nur 0,24 mal, das schwerere Tannenholz hingegen 0,45 mal so schwer als Wasser. Wie viel Kork muß man nun mit einem Stücke Blei von 60 Pfund verbinden, damit der so verbundene Körper gerade so viel wiege, als ein Stück Tannenholz von gleicher Größe, also schwimmen könne?

Antw. 65,846.... Pfund.

30) Es seyen w und x zwei Größen, welche so von einander abhangen, daß, wenn man der Größe x die n bestimmten Werthe a, a', a'', a''', rc. giebt, die Größe w

nach der Reihe die n entsprechenden bestimmten Werthe w, w', w'', w''', ꝛc., erhalte. Wie läßt sich nun w durch ein Polynom von x so darstellen, daß die angegebenen Bedingungen erfüllt werden?

Antw. Man setze $w = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ ꝛc., und gebe dem zweiten Theile dieser Gleichung n Glieder; substituire hierauf nach einander für w und x die entsprechenden Werthe w, a; w', a'; w'', a''; w''', a'''; ꝛc.; so erhält man n Gleichungen, durch welche sich die Coefficienten A, B, C, D, E, ꝛc., bestimmen lassen.

3) Es seyen w, x, y, drei Größen, welche so von einander abhangen, daß sie gleichzeitig die Werthe w, a, b; w', a', b'; w'', a'', b''; w''', a''', b'''; ꝛc. erhalten, so daß solche zu drei zusammen gehören und einander entsprechen. Wie läßt sich nun w durch ein Polynom von x und y ausdrücken? (M. s. S. 298.)

Antw. Man setze $w = A + Bx + B'y + Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y +$ ꝛc., und gebe dem zweiten Theile so viele Glieder, als es der entsprechenden Werthe giebt; substituire hierauf für w, x, y, gleichzeitig und nach der Reihe, die Werthe w, a, b; w', a', b'; w'', a'', b''; ꝛc.; so erhält man gerade so viele Gleichungen, als zur Bestimmung der Coefficienten A, B, B', C, C', C'', D, D', ꝛc., nöthig sind, und es lassen sich folglich diese Coefficienten bestimmen.

32) Es seyen w, x, y, z, vier Größen, welche so von einander abhangen, daß sie gleichzeitig die Werthe w, a, b, c; w', a', b', c'; w'', a'', b'', c''; ꝛc. erhalten, so daß immer vier von diesen Werthen zusammen gehören. Wie läßt sich w durch ein Polynom von x, y, z, ausdrücken?

Antw. Man setze $w = A + Bx + B'y + B''z + Cx^2 + C'xy + C''xz + C'''y^2 + C''''yz + C'''''z^2 + Dx^3 +$

$D'x^2y + D''x^2z +$ ꝛc., und verfahre hierauf wie in den beiden vorigen Aufgaben.

Auf eben diese Weise würde man verfahren, wenn mehrere Größen und mehrere entsprechende Werthe gegeben wären. Diese Aufgaben sind übrigens sowohl in der Physik, als in allen Theilen der angewandten Mathematik von großem Nutzen. Auch sind sie die Grundlagen mancher analytischen Methoden und Interpolationsformeln.

33) Man soll eine Zahl finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man dieselbe mit dem Quadrate einer andern, um 1 geringern Zahl multiplicirt, das Produkt $= 1$ sey. Welche Zahl ist es?

Antw. Die Zahl ist durch die Gleichung $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ gegeben: die einzige reelle Wurzel dieser Gleichung ist 1,7548....

34) Welchen Werth hat der ins Unendliche sich erstreckende continuirliche Bruch

$$\cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q + \text{ꝛc.}}}}$$

wenn darin kein anderer Quotient als q vorkommt?

Antw. $\dfrac{-q + \sqrt{(q^2 + 4)}}{2}$

35) Welchen Werth hat der ins Unendliche fortlaufende periodisch-continuirliche Bruch

$$\cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}}}$$

worin die Quotienten q, r, immerfort wiederholt vorkommen?

Antw. $-\dfrac{r}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{r^2}{4} + \dfrac{r}{q}\right)}$.

36) Welchen Werth hat aber ein continuirlicher Bruch wie der vorige, wenn anstatt zweier Quotienten, q, r, drei Quotienten, q, r, s, ins Unendliche wiederholt vorkommen?

Antw. Den Werth

$$-\frac{qrs+q+s-r-\sqrt{[(qrs+q+s+r)^2+4]}}{2(qr+1)}.$$

37) Welchen Werth wird ferner ein solcher Bruch haben, wenn vier Quotienten, q, r, s, t, ins Unendliche wiederholt vorkommen?

Antw. $$-\frac{qrst+qr+qt+st-rs}{2(qrs+q+s)}+$$
$$\frac{\sqrt{[(qrst+qr+qt+st+rs+2)^2-4]}}{2(qrs+q+s)}.$$

Wie läßt sich wohl das Gesetz dieses Werthes angeben, wenn mehr als vier Quotienten periodisch wiederholt vorkommen?

38) In einer geometrischen Proportion ist gegeben: die Summe der beiden mittlern Glieder $=a$, die Summe der beiden äußern $=b$, und die Summe der Biquadrate aller vier Glieder $=c$. Welche Proportion ist es?

Antw. Es sey d die Differenz der beiden mittlern Glieder, so ist $d=\sqrt{[-a^2-2b^2\pm2\sqrt{(c+2a^2b^2)}]}$, und die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{2}[b-\sqrt{(b^2-a^2+d^2)}]:\tfrac{1}{2}(a-d)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+d):\tfrac{1}{2}[b+\sqrt{(b^2-a^2+d^2)}].$$

39) In einer geometrischen Proportion ist gegeben: die Summe aller Glieder $=a$, die Summe ihrer Quadrate $=b$, und die Summe ihrer Biquadrate $=c$. Welche Proportion ist es?

Antw. Es bezeichne p das Produkt der beiden äußern, also auch der beiden mittlern Glieder, und d die Differenz

zwischen der Summe der beiden äußern und der Summe der beiden mittlern Glieder: so ist

$$p = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b + b^2 - 2c}{8}},$$

und $d = \sqrt{(2b + 8p - a^2)}$. Die vier Glieder der gesuchten Proportion sind daher:

$$\tfrac{1}{4}[a - d - \sqrt{[(a-d)^2 - 16p]}]$$
$$\tfrac{1}{4}[a + d - \sqrt{[(a+d)^2 - 16p]}]$$
$$\tfrac{1}{4}[a + d + \sqrt{[(a+d)^2 - 16p]}]$$
$$\tfrac{1}{4}[a + d + \sqrt{[(a-d)^2 - 16p]}]$$

40) Ein Schuldner ist verpflichtet, die Summen a, a', a'', a''', ꝛc. in den Terminen n, n', n'', n''' zu bezahlen, will aber seine ganze Schuld $a + a' + a'' + a''' +$ ꝛc. auf einmal bezahlen; nach welcher Zeit muß dieses geschehen, wenn der Zinsfuß $= p$ ist, und die Zinseszinsen mit in Anschlag gebracht werden?

Antw. Es seyen w, w', w'', w''', ꝛc. die baaren Werthe dieser Terminal-Zahlungen, so daß $w = \frac{a}{p^n}$, $w' = \frac{a'}{p^{n'}}$, $w'' = \frac{a''}{p^{n''}}$, ꝛc., so giebt der Ausdruck

$$\frac{\log(a + a' + a'' + a''' + \text{ꝛc.}) - \log(w + w' + w'' + w''' + \text{ꝛc.})}{\log p}$$

die gesuchte Zeit. (Einheit der Zeit die nämliche, als die für n, n', n'', n''', ꝛc.)

41) Jemand ist 40000 Thlr. schuldig. Da er aber diese Schuld nicht auf einmal abzutragen vermag, so wird er mit seinem Gläubiger eins, ihm von heute an, am Ende eines jeden Jahres 2500 Thlr. zu bezahlen, und seine Schuld mit 5 Procent zu verzinsen. Als er nun die Zeit berechnete, in welcher sie völlig getilgt seyn wird, findet er, daß am Ende des letzten Jahres er nicht mehr volle 2500 Thlr. zu bezahlen

hat, sondern etwas weniger: um wie viel weniger, wenn die Zinseszinsen mit in Rechnung gebracht werden?

Antw. Um 31,88 Thlr. weniger.

42) Es werden vier Zahlen von einer solchen Beschaffenheit gesucht, daß die Summe derselben $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$, die Summe der zwölf Produkte, welche entstehen, wenn eine jede mit dem Quadrate einer andern multiplicirt wird $= c$, und die Summe der sechs Produkte, welche entstehen, wenn das Quadrat einer jeden mit dem Quadrate einer andern multiplicirt wird $= d$. Wie werden diese Zahlen gefunden?

Antw. Die Summe der Produkte der vier gesuchten Zahlen zu zwei und zwei ist $= \frac{1}{2}(a^2 - b)$, die Summe ihrer Produkte zu drei und drei $= \frac{1}{6}(a^3 - ab - 2c)$, und das Produkt aller vier $= \frac{1}{24}(a^4 + 2a^2b - 3b^2 - 8ac + 12d)$. Die vier Zahlen sind daher durch die folgende Gleichung gegeben:

$$x^4 - ax^3 + \tfrac{1}{2}(a^2 - b)x^2 - \tfrac{1}{6}(a^3 - ab - 2c)x$$
$$+ \tfrac{1}{24}(a^4 + 2a^2b - 3b^2 - 8ac + 12d) = 0.$$

43) Vier Zahlen sind durch nachstehende Merkmale gegeben: die Summe derselben ist $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$, die Summe ihrer Cuben $= c$, und die Summe ihrer Biquadrate $= d$. Wie werden sie gefunden?

Antw. Die Summe der Produkte der vier gesuchten Zahlen zu zwei und zwei ist $= \frac{1}{2}(a^2 - b)$, die Summe ihrer Produkte zu drei und drei ist $= \frac{1}{6}(a^3 - 3ab + 2c)$, und das Produkt aller vier $= \frac{1}{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d)$. Die vier Zahlen sind daher durch die folgende Gleichung gegeben:

$$x^4 - ax^3 + \tfrac{1}{2}(a^2 - b)x^2 - \tfrac{1}{6}(a^3 - 3ab + 2c)x$$
$$+ \tfrac{1}{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d) = 0.$$

Druckfehler.

Seite 27 Aufg. 22 Z. 2 l. $= 120$ ꝛc.

„ 43 „ 17 l. $= (3a - 1)\sqrt[3]{\frac{a^2x}{2b}}$





